研究調査報告　第402集

中学校数学科における
数学的な思考力を高める研究

－日常生活の事象を数学と結びつけて－

2017／3

四日市市教育委員会　教育支援課

はじめに

子どもたちが将来生きていく社会は、多様で変化が激しく、課題は一層複雑化し、解決の道筋が明らかでない問題が多く存在することが予想されます。

そのため、自身が身につけた知識・技能や収集した情報、体験等を活用し、他者と協働しながら主体的に問題を解決していく力を養うことが求められています。この力を育成するために、次期学習指導要領では、「主体的・対話的で深い学び」の実現に向けた授業改善を求めています。

本市においても、「学ぶこと」と「社会とのつながり」を意識した教育課程を実現し、「社会人になっても通用する問題解決能力」の養成を図ることが重要であると考えています。このことは、平成２７年１１月に「四日市市教育大綱」の理念の一つに示され、平成２８年１月に策定した「第３次四日市市学校教育ビジョン」にも筆頭の施策として位置付けています。

この取り組みを進めるため、本市では、「問題解決能力向上のための授業づくりガイドブック」（平成２５年３月に全教職員に配付）を活用した授業改善に取り組んできました。このガイドブックでは、子どもの思考過程を「５つのプロセス」で表し、「四日市モデル」として示しました。この考え方を課題研究にも取り入れ、今後の「四日市モデル」を活用した授業のあり方について研究を進めています。

本年度の課題研究では、小学校体育科においてタブレットＰＣを効果的に活用することで、「対話的な学び」を活性化させる研究を行いました。また、中学校数学科において「四日市モデル」を活用し、日常生活の事象を扱った問題を取り入れることで、数学的な思考力を高める研究に取り組みました。さらに、本市の課題である不登校を、未然に防止するための取り組みを行い、校内支援体制のあり方について、調査・研究を進めてきました。

その成果を研究調査報告書として、ここにまとめました。これらの研究成果が、学校・園の日々の教育実践に役立つことを期待します。

最後に、本課の研究調査を進めるにあたって、御指導・御助言いただいた国立教育政策研究所初等中等教育研究部の松尾知明 総括研究官、並びに研究協力員をはじめとして調査・実践面で御協力いただいた学校等の関係者の皆様に心から感謝の意を表します。

平成２９年３月

四日市市教育委員会教育支援課
課　長　　田中　重行

― 目　次 ―

Ⅰ　研究主題

中学校数学科における数学的な思考力を高める研究

－日常生活の事象を数学と結びつけて－

Ⅱ　主題設定の理由

めまぐるしく変化する社会の中で、将来を生きる子どもたちが未知の状況に対応できるよう、次期学習指導要領改訂に向けた中央教育審議会の答申では、子どもたちに求められる資質・能力を「生きて働く『知識・技能』の習得」「未知の状況にも対応できる『思考力・判断力・表現力等』の育成」「学びを人生や社会に生かそうとする『学びに向かう力・人間性等』の涵養」の３つの柱に基づいて教育課程の枠組みが整理されている。その３つの柱に沿って、各教科等の特質に応じたさまざまな事象等を捉える視点や思考を、「見方・考え方」として明らかにしており、それらを重視している。

その中で、中学校数学科の「数学的な見方・考え方」については、「事象を数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、論理的、統合的・発展的に考えること」と記述している。また、「『数学的な見方・考え方』を働かせながら、知識・技能を習得したり、習得した知識・技能を活用して探究したりすることにより、生きて働く知識となり、技能の習熟・熟達にもつながるとともに、より広い領域や複雑な事象を基に思考・判断・表現できる力が育成される。このような学習を通じて、『数学的な見方・考え方』が更に豊かで確かなものとなっていくと考えられる」と説明している。

一方、「OECD の PISA 調査」の問題や「全国学力・学習状況調査」のＢ問題を見てみると、「日常生活や社会」と数学を結びつけ、知識・技能を日常生活のさまざまな場面で活用する問題が多く出題されている。「PISA2012 年 調査評価の枠組み」では、数学的リテラシーを「様々な文脈の中で数学的に定式化し、数学を活用し、解釈する個人の能力。それには、数学的に推論することや、数学的な概念・手順・事実・ツールを使って事象を記述し、説明し、予測することを含む。この能力は、個人が現実世界において数学が果たす役割を認識したり、建設的で積極的、思慮深い市民に求められる、十分な根拠に基づく判断や意思決定をしたりする助けとなるものである」と定義し、現実世界における事象を数学の問題として重点的に取り上げている。これらのことから、「数学的な思考力」とは、日常生活の具体的な事象と数学を結びつけ、数学的な知識・技能を日常生活のさまざまな場面で活用する力と考えることができる。

上記のことに関連して、本市中学校の数学の学習状況は、平成 28 年度「全国学力・学習状況調査」の結果から、数学Ａ、Ｂ問題ともに、平均正答率は全国を上回っており、基礎的・基本的な知識・技能については概ね理解できているといえる。しかし、Ｂ問題の記述式の結果からは、「事柄が成り立つ理由を数学的な表現を用いて説明すること」など、活用力と表現力において課題が見られる。

そこで、本研究では、数学的な思考力を「数学的な知識・技能を活用する力」と定義し、身につけた数学的な知識・技能を活用して日常生活の事象を扱った問題を解決することが、数学的な思考力を高めることに有効であることを明らかにしたい。

Ⅲ　研究の目的

本研究の目的は、身につけた数学的な知識・技能を活用して日常生活の事象を扱った問題を解決することが、数学的な思考力を高めることに有効であることを検証することである。

Ⅳ　研究の内容・方法

1　研究の内容

⑴　本研究で育てたい「数学的な思考力」

本研究では、「PISA2012 年 調査評価の枠組み」で示された数学的リテラシーの定義の中にある「様々な文脈の中で数学的に定式化[1]すること」の具体的な活動【表１】と数学的リテラシーの基盤となる「基本的な数学の能力」【表２】をもとに、本研究で育てたい「数学的な思考力」を具体的に考える。

【表１】「数学的に状況を定式化すること」の具体的な活動

（ア）現実世界の文脈に置かれた問題の数学的側面と、重要な変数を見つける。
（イ）問題あるいは状況の中にある数学的な構造（規則性、関係、パターンなど）を認識する。
（ウ）状況あるいは問題を単純化して、数学的な分析をしやすくする。
（エ）文脈から抽出された数学的モデル化や単純化の背後にある制約や仮定を見つける。
（オ）適切な変数、記号、図表、標準的なモデルを用いて、状況を数学的に表現する。
（カ）問題を別の方法で表現する。これには数学的な概念を用いて問題を構成したり、適切な仮定をおいたりすることが含まれる。
（キ）問題の文脈を固有な表現と、数学的に表現する際に求められる記号的・形式的な表現との関係を理解し、説明する。
（ク）問題を数学の言語や表現に翻訳する。
（ケ）既知の問題や数学的概念・事実・手順と対応する問題の側面を認識する。
（コ）テクノロジー（表計算ソフト、グラフ計算機のリスト機能など）を使い、ある文脈に置かれた問題に固有の数学的な関係を表現する。

本研究を中学校１年生の「関数（比例・反比例）」の分野で行い、「数学的な知識・技能を活用する力」をつけるために、この「数学的に状況を定式化すること」の具体的な活動【表１】の 10 項目から「関数」分野で関連が深いと考えた（ア）（イ）（オ）（ク）の４項目に限定し、重視することとする。

また、「基本的な数学の能力」【表２】の７項目から、「数学的な思考力」と特にかかわり

[1]「定式化する」とは、数学を適用して使う機会を特定すること。問題や課題に直面した際に、数学を用いて理解したり、解決したりすることが可能だとわかること。問題を解決したり、難しい問題に対処したりするために、数学的な構造や表現を与えたり、変数を特定したり、単純化する仮定をおいたりして、与えられた状況を理解し、それを数学的に処理しやすい形に変えること。

の深い「数学化」[2]「表現」[3]を重視する。この２項目の育成に重点を置いて授業に取り組むことで、「数学的な思考力」が高まることを検証する。

そこで、【表１】の（ア）（イ）（オ）（ク）と【表２】の「数学化」「表現」を関連させ、【表３】を作成し、これを本研究の「関数分野において育てたい『数学的な思考力』」とする。

【表２】基本的な数学の能力

１．コミュニケーション
２．数学化
３．表現
４．推論と論証
５．問題解決のための方略の考察
６．記号的、形式的、専門的な表現や操作の使用
７．数学的ツールの使用

さらに、【表３】をもとに「基本的な数学の能力」の中の「数学化」「表現」の２項目を重視する視点として、学習指導案を作成し、授業を行う。

【表３】本研究の「関数分野において育てたい『数学的な思考力』」

基本的な数学の能力	関数での具体的な数学的な知識・技能を活用する力
「数学化」 現実世界における問題の中で､関数の関係を見つけ、関数を使って考えること。	（A）日常生活の事象の中にある数量関係から、「ともなって変わる２つの数量」を見つける。 （B）日常生活の事象の中にある数量関係が、関数の関係であることを認識する。
「表現」 自分の考えを示すために、数量関係を表、式、グラフや数学的な用語で表現すること。	（C）「ともなって変わる２つの数量の変化」を表、式、グラフを用いて、数学的に表現する。 （D）問題を数学の言語や表、式、グラフと相互に関連づけて表現する。

⑵　「数学的な思考力」を育てる３つの手だて

数学的な思考力を育てるために、以下の３つの手だてを行う。

①　数学の問題に日常生活の事象を取り入れる

手だての１つ目は、数学を活用して解決することができる日常生活の事象に関連した問題を、授業に意図的に取り入れることである。日常生活の事象に関連した問題を数学的な知識・技能を活用して解決することができた際に、数学の有用性を感じ、数学に興味・関心を持つことができると考える。そして、生徒が数学的な見方・考え方を働かせ、「他の教科や日常生活のさまざまな事象が数学に関連しているのではないか」と考えることが数学的な思考力

[2] 「数学化」とは、現実世界で定義された問題を、厳密に数学的な形式に変換する（構造化する、概念化する、仮定をおく、モデルを定式化する等）ことや、数学的な結果や数学的モデルを元の問題と関係付けて解釈や評価をすること。
[3] 「表現」とは、状況を捉え、問題と相互作用したり、自分の考えを示したりするために、様々な表現を、選択し、解釈し、変換し、使用すること。

を高めることにつながると考える。

本研究で扱う「関数」は、ある情報をもとに、未来を予測するために考えられたものである。例えば、関数を使うと、「時速 50ｋｍで走り続けた自動車が２時間後にどのくらい進んでいるか」などの問いに、およその見当をつけて考えることができる。また、関数であると意識していなくても、「携帯電話の料金プランの比較」など、関数を使って日常の問題を解決していることが多く見受けられる分野でもある。

そこで、関数（比例・反比例）の関係である日常生活の事象を取り上げることで、数学の有用性を実感させるとともに、数学に関わる事象や、日常生活や社会に関わる事象について考えさせることを通して数学的な見方・考え方を育てる。

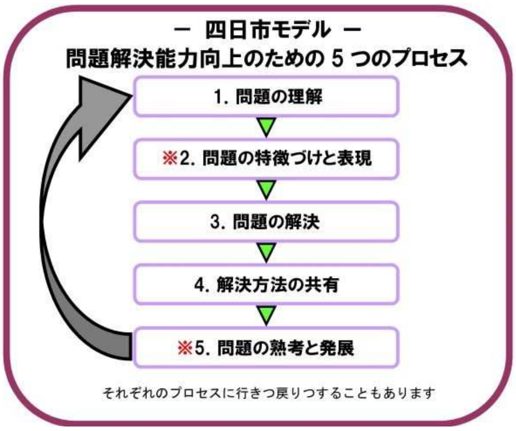
②　生徒の思考過程を表現するワークシートの活用

手だての２つ目は、生徒の思考過程を表現するワークシートを活用することである。生徒の中には、途中の式や結論だけを書いて終わっていたり、結論は書けていても、なぜその結論になるのか、根拠にもとづいて説明できなかったりする生徒がいる。

そこで、日常生活の事象を取り上げて問題を解決する際に、意図的に、言葉や数、式、図、表、グラフなどの多様な表現方法を使わせる。そこで、気づいたことや考えた過程を表現することができるよう工夫したワークシートを作成し活用する。どのように考えたのかを、自分の思考過程を整理しながら、言葉や数、式、図、表、グラフなど数学的な表現を用いて、簡潔、明瞭、的確に書くことは、数学的な思考力を高めることができるとともに、表現力を高めることにもつながると考える。また、ワークシートの活用と関連させて、授業で意見を交流する際には、理由や根拠を説明する場面を設定し、数学的な思考力を活用するとともに相手に伝わる表現力を身につけさせるようにする。

③　「四日市モデル」第５プロセスの活用【資料１】

手だての３つ目は、本市の「問題解決能力向上のための授業づくりガイドブック」（2013）で提唱している「５つのプロセス」（以下「四日市モデル」【図１】）の第５プロセスを活用することである。「四日市モデル」は、各プロセスにおける子どもの活動と指導上の留意点を示し、問題解決能力を向上させることを目指している。身につけた知識・技能を活用して解決方法を導き出し、実行するといった「プロセス」を通して問題を解決することが、子どもの問題解決能力向上につながると考え、「四日市モデル」の授業等での活用を推進している。



【図１】「四日市モデル」

本市では、特に「第２プロセス」と「第５プロセス」に重点を置いている。「第２プロセス」は「問題の特徴づけと表現」として、問題解決の見通しを持たせる「プロセス」である。一方、「第５プロセス」は「問題の熟考と発展」として、第１プロセスから第４プロセスで得た知識・技能を次の問題に活用する「プロセス」である。数学的な思考力が身についたか否かを判断するためにも、「第５プロセス」は重要なプロセスであると考える。

しかし、多くの数学の授業では、授業のまとめの部分で知識・技能の定着を図る問題になっていない練習問題を解かせていたり、学習したまとめを数学的な表現（用語）を使わずに書かせていたりすることがある。

そこで、授業のまとめの部分において、「第５プロセス」を活用し、日常生活の事象を取り上げた問題を扱うことにより、既習の数学的な知識・技能を活用して解決したり、数学的な表現を用いて伝えたりすることで、日常生活の事象と数学を結びつけ、数学的な思考力を高めることができると考える。

2　研究の方法

⑴　調査対象

四日市市内の中学校１校に研究を依頼し、１年生３クラスを調査対象として研究を進める。授業は研究協力員が行い、記録・分析は長期研修員が行う。

⑵　データの収集と分析

本研究では、プレテスト、ポストテスト、ワークシート、事前・事後意識調査のデータを収集し、数学的な思考力を高める指導について分析を行う。

①　ルーブリックによる評価【資料２～５】

学習指導案に、「基本的な数学の能力」の中の「数学化」「表現」を重視する視点として取り入れる。また、同じ観点でルーブリックを作成し、プレテスト、ポストテスト、ワークシートの記述を評価する。

②　プレテスト・ポストテスト【資料６、資料７】

実践授業前に、日常生活の事象を題材としたプレテストを実施する。比例や方程式など、複数の考え方ができる問題を扱う。それらをルーブリックにおいて評価し、思考力・表現力の実態を把握する材料とする。また実践授業後には、関数の問題づくりと、この単元で学習した比例などについて、複数の考え方や、表、グラフを用いて考えることができるようになったかを評価するポストテストを実施する。プレテストとポストテストを比較し、「基本的な数学の能力」の中の「数学化」「表現」において、生徒がどのような変化を見せるのか、比較し分析する。

③　事前・事後意識調査【資料８】

授業実践前に事前意識調査を調査対象の生徒全員に行う。数学に対しての関心・意欲や、学習活動への意識、日常生活において数学的な考え方をしたことがあるか等についての意識調査を実施する。

「日常生活で数学を活用できるかを考えたことがあるか」という質問に対して、生徒は日常生活で数学を使用している場面があったとしても、それを意識していない場合が想定され、「数学的な思考力を活用できるか」について、「考えたことがない」という意見が出ることや、数学を活用した具体的な場面を思いつかなかったり、記述できなかったりすることがあると考えられる。

そこで、授業実践後の事後意識調査では、日常生活の事象で、数学的な思考力を活用して問題を解決できるようになったか、数学的な思考力を活用した具体的な場面を記述できるようになったかなど、意識の変化を検証する。

３　研究計画

研究計画は以下の通りである。

月	本研究に関しての計画	実施する内容・研究協力校との連携
4	・課題研究打合せ会	・研究協力校へ依頼
5	・第１回課題研究会議 ・第２回課題研究会議	
6	・第３回課題研究会議（第１回国研指導）	・研究協力員との打合せ
7		・調査対象クラスの授業参観
8	・検証授業の準備	
9	・第４回課題研究会議（第２回国研指導） ・検証授業の準備	
10	・第５回課題研究会議 ・検証授業の準備	・研究協力員との打合せ
11	・検証授業	・事前意識調査・プレテストの実施 ・検証授業
12	・第６回課題研究会議 ・第７回課題研究会議（第３回国研指導）	・検証授業
1	・第８回課題研究会議（第４回国研指導）	・検証授業 ・事後意識調査・ポストテストの実施
2	・第９回課題研究会議	

Ⅴ　結果と考察

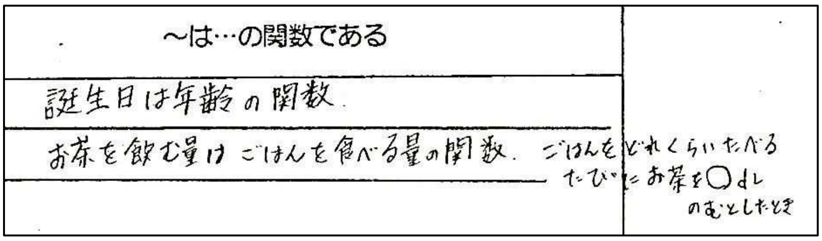
１　実践の様子

⑴　第１時【指導案 資料９、ワークシート 資料 10】

「スーパーの絵」【資料 11】を見て、ともなって変わる２つの数量を見つける活動では、生徒は該当する関係になる数量をたくさん見つけることができた。事前意識調査、プレテストともに下位層にあたる生徒Ａは、「かごに物を入れたら、重さが増える」と書いていた。表現としては不十分であるが、ともなって変わる２つの数量について考えることができていた。

見つけた２つの数量が関数の関係であることを考える場面では、「商品の個数と代金の合計」という２つの数量の関係においては、１個の商品の値段が同じ場合（または、同じ商品を買う場合）は、商品の個数と代金の合計は関数の関係であるが、違う値段の物を買うと「商品の個数と代金の合計」だけでは、関数の関係でないことに気づくことができた。このことから、条件や設定の決め方によっては関数であるものと関数でないものがあることに気づくことができた。

第５プロセスでは、身の回りで関数であると考えられるものを見つける活動を行った。身の回りで関数であるものとして、「消費税は買う物の値段の関数である」「水道代は水を出す量の関数である」「こづかいの金額はこづかいをもらう回数の関数である」などお金に関するものや、「本の残りのページ数は本を読んだページ数の関数である」「残りの距離は進んだ距離の関数である」等を書いている生徒がいた。また、【図２】のように、設定を考えて、「ごはんをどれくらい食べるたびにお茶を○ｄＬ飲むとしたとき、『お茶を飲む量はごはんを食べる量の関数である』」と書いている生徒もいた。



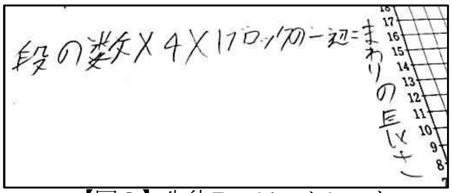
【図２】生徒のワークシート

しかし、「体重は身長の関数である」と関数でないものを書いている生徒や、【図２】のように「誕生日は年齢の関数である」や「気温は天気の関数である」と数量でないものを書いている生徒もいた。

⑵　第２時【指導案 資料 12、ワークシート 資料 13】

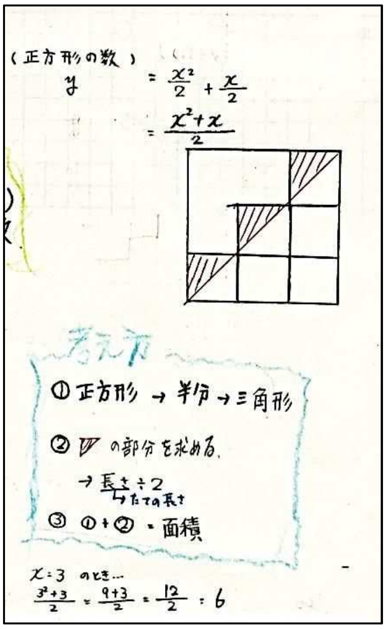
正方形を階段状に並べたとき、階段の段数が増えるにともなって変わる数量について、表、グラフ、式に表して考える学習活動を行った。生徒が考えたものとして階段の段数が増えると、正方形の数、全体の面積、高さ、周りの長さ、一番下の正方形の数が、ともなって変わる数量であるという意見が出た。その中で、周りの長さと面積を取り上げ、表、グラフ、式に表すことを行った。生徒たちは表を書く際には、階段状に並べた正方形を数えることから規則性を見つけ、表を完成することができた。

式をつくる際には、周りの長さを求める式は、なぜ、「段数×４」で求めることができるのかを考えさせた。生徒は階段状になっている正方形の辺を移動すると大きな正方形の辺になることを使い考えることができた。プレテスト下位層の生徒Ｂは【図３】のように「段の数×４×１ブロックの１辺＝まわりの長さ」と書いていた。「１ブロックの１辺はいらないのではないか」と質問すると「この場合は１辺が１㎝だけど、２㎝の場合もあるから」と他の問題でも通用する式化を行うことができた。



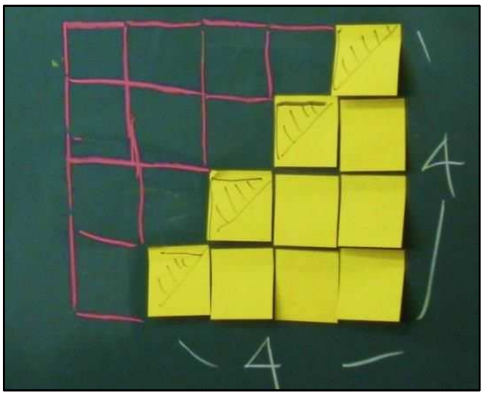
【図３】生徒Ｂのワークシート

面積を求める式は、【図４】のように階段状を正方形にして、正方形の面積を半分にし、三角形の面積を求め、残りの三角形の面積は段数の半分になる「段数×段数×$\frac{1}{2}$＋段数×$\frac{1}{2}$」という考え方と、【図５】のように同じ階段を合わせて、長方形になる「段数×（段数＋１）×$\frac{1}{2}$」という考え方の２つをクラスで交流した。



【図４】生徒のワークシート

第５プロセスでは、関数であるか関数でないかを考える問題【資料 13】を行った。第３、４プロセスで式化を行っていたため、式をつくり考える生徒が多く、表をつくって考える生徒は少なかった。関数であれば、表や式をつくることができると確認したが、⑵⑶を関数でないと考え、理由を「減法は関数でない」「⑵⑶は使った量は２倍、３倍・・・しても、残りの量は２倍、３倍にはならないから」と書いている生徒がいた。しかし、⑷の関数でない理由は「表でかくことはできない」「同じ年齢でも、身長の高い人と低い人がいて、個人差があるから」「式では表せないから」と書くことができた生徒が 50％程度おり、半数以上の生徒が関数であるものと関数でないものを見分けることができた。

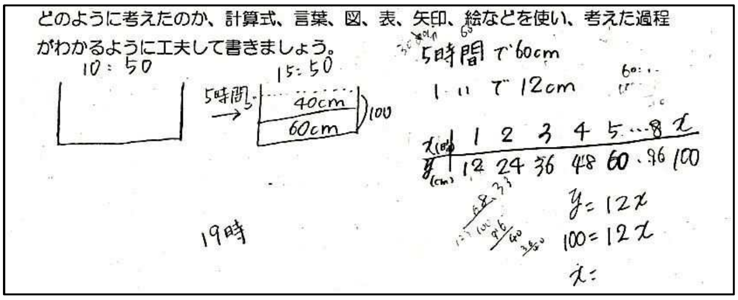


【図５】板書の様子

⑶　第５時【指導案 資料 15、ワークシート 資料 16 上】

第５プロセスでは、プールの水を止める時間を求める問題【資料 16】を行った。１時間で水が何㎝の高さになるかを求めている生徒が 50％程度いた。１時間あたりの水の高さが 12 ㎝になることを使い、残りの水の高さ 40 ㎝から時間を求める生徒や、100 ㎝になるまでにかかる時間を求める生徒がいた。

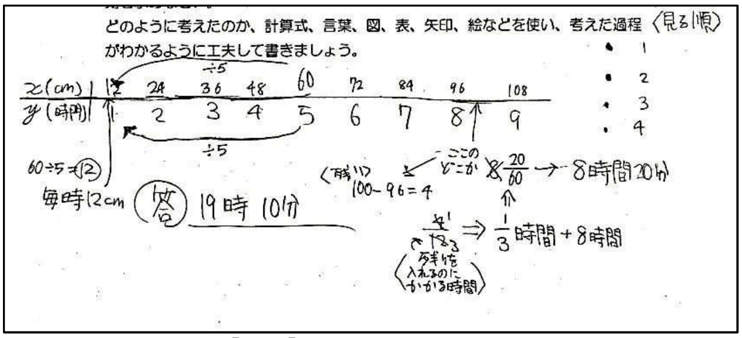
また、【図６】のように表をつくり、比例定数を求め、比例の式$y=12x$をつくって考える生徒もいた。しかし、プレテスト下位層や中位層の中には、$100\div12$を小数で考えて、割り切れず、答えを求められない生徒や、時間を求めると$\frac{25}{3}$時間になるため、分数の処理ができず、時間が求められない生徒もいた。



【図６】生徒のワークシート

問題を解く時間は 10 分程度であったが、集中して解くことができた。互いに「答えは？」「19 時 10 分になった」と確認し合っている姿があった。

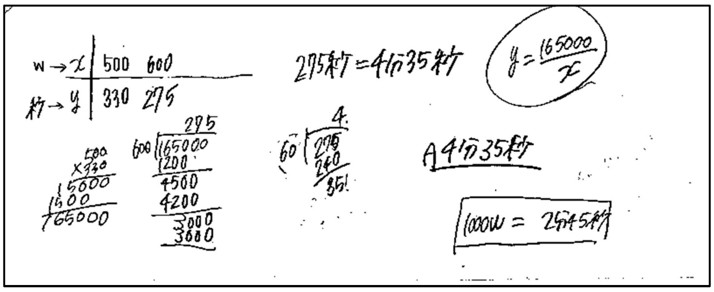
検証のために、１クラスだけ、第３時【指導案 資料 14】で行った。プレテスト中位層の数名は【図７】のように表を書いていたが、比例の式を詳しく学習する前だったため、比例の式をつくって考えている生徒はいなかった。



【図７】生徒のワークシート

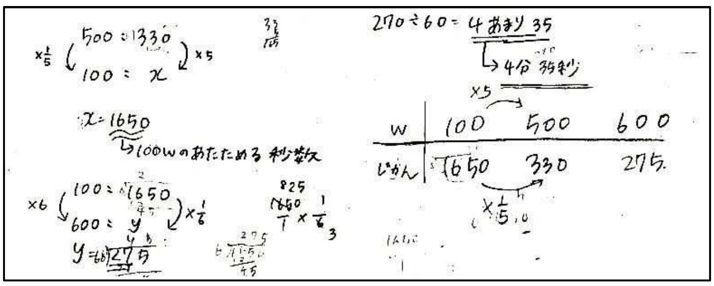
⑷　第 12 時【指導案 資料 17、ワークシート 資料 16 下】

第５プロセスでは、電子レンジで温める時間を求める問題【資料 16】を行った。問題を解く前に電子レンジの出力の大きい方が、温める時間が短くなることを確認した。



【図８】生徒Ｃのワークシート

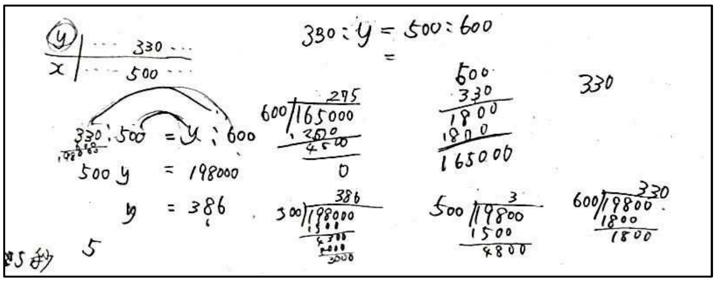
表をつくって考えている生徒が 55%程度いた。【図８】の生徒Ｃのように表から比例定数を求め、反比例の式をつくって考えている生徒や、【図９】のように一方をa倍すると、もう一方は$\frac{1}{a}$倍になるという考え方を使って求めている生徒が 25%



【図９】生徒のワークシート

程度いた。この中で、生徒Ｃは最初、式をつくらずに求めていたが、研究協力員の声掛けで反比例の式をつくった。生徒Ｃは式をつくったとき「y＝の式ができたら、全部対応できるからよい」と出力を代入すれば、温める時間が求められることに気づくことができ、式で表すことのよさについて発言していた。

その一方で、反比例と問題に書いてあるものの、【図 10】のように比を使って考える生徒もいた。しかし、600Wの方が 500Wと比べて時間が長くなったため、間違いに気づき直している姿があった。



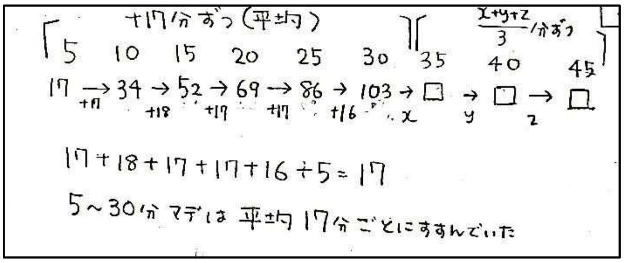
【図 10】生徒のワークシート

また、第５時と同様に小数で割り切れないため、答えを求められない生徒や、分数で求めると $\frac{55}{12}$ 分になるため、分数の処理ができず、時間が求められない生徒もいた。

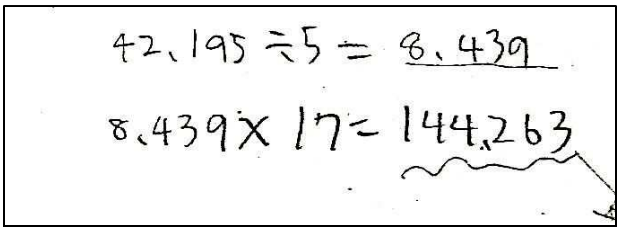
授業の感想の中には、「これから電子レンジを使うとき、計算して使おうと思います」と書いている生徒がいた。

(5) 第 15 時（３クラスのうち１クラスで実践）【指導案 資料 18、ワークシート 資料 19】

マラソンのゴール時間を予想する問題【資料 19】を行った。表から距離が５㎞ずつ増えるとタイムが何分ずつ増えるのか、距離が２倍、３倍になるとタイムがどのように変化するのかを考えている生徒がいた。しかし、一定の割合でタイムが増えていなかったり、距離が２倍、３倍となってもタイムが２倍、３倍となっていなかったりすることがあったためグラフをかいても比例の関係であると気づかず、どのように求めたらよいか困り、相談する姿があった。

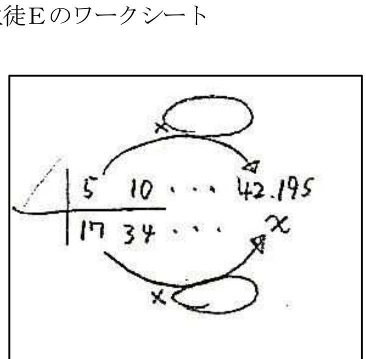


【図 11】生徒Ｄのワークシート



【図 12】生徒Ｅのワークシート

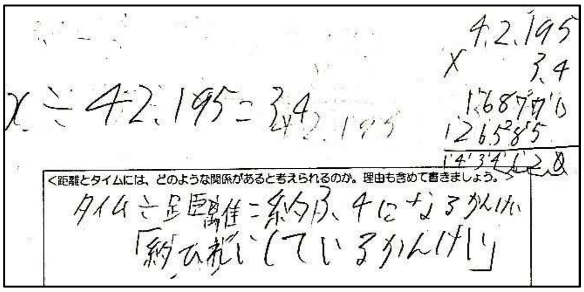
生徒Ｄは【図 11】のようにタイムの平均を考えていたが、この先どのように考えたらよいのか困っていた。また、生徒Ｅは【図 12】のように式をつくって答えを求めていたが、これで答えが求められているのか、わからず困っていた。すると、生徒Ｄは生徒Ｅの考えた式と生徒Ｆの書いた【図 13】を



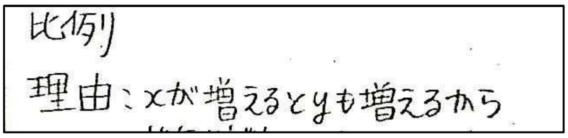
【図 13】生徒Ｆのワークシート

見て、距離とタイムは比例の関係であることに気づき、自分の書いたグラフを見直し、距離とタイムは比例の関係であることに納得し、生徒Ｅと生徒Ｆに説明をする姿があった。

また、生徒Ｂはタイム÷距離がいつも約 3.4 になることに気づき、【図 14】のように式をつくり、ゴール時間を求めていた。しかし、距離とタイムの関係の説明には、【図 14】のように最初は「タイム÷距離＝約 3.4 になる関係」と書いていた。距離とタイムが比例の関係であることの説明を聞いたあと「約比例している」と書いていた。



【図 14】生徒Ｂのワークシート



【図 15】生徒のワークシート

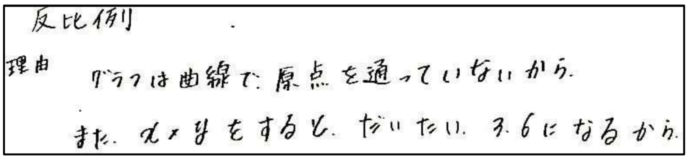
距離とタイムの関係とその理由を説明するワークシートには、距離とタイムの関係を「比例」としか書いていない生徒がいたり、【図 15】のように比例と考えた理由を数学的な表現（用語）を用いて書いたりすることができなかった生徒が 30%程度いた。また、ゴール時間の予想はできているものの、距離とタイムの関係とその理由を書いていない生徒が 30%程度いた。

⑹ 第 16 時（３クラスのうち２クラスで実践）【指導案 資料 20、ワークシート 資料 21】

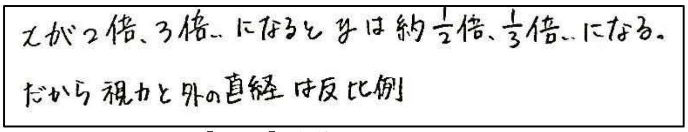
視力とランドルト環[4]の関係を考える問題【資料 21】では、視力検査表にない視力が 0.05 のランドルト環をつくるにはどうするとよいかを考えさせた。すると、「0.05 のランドルト環は 0.1 のランドルト環の２倍だと思う」「規則性を見つけたらよい」という意見が出た。

次に、視力が 0.05 のランドルト環をつくるために調べる必要がある数量を考えさせた。その中から生徒それぞれに１つの数量を選ばせ、視力検査表にあるランドルト環を実際に測らせた。

測っているとき、生徒たちは規則性があることに気づいたが、誤差があるため「あれ、おかしいな」とつぶやく姿があった。そのため、正確に測れていないことがあるので、誤差が出ることを伝えた。また、誤差のため、視力が２倍、３倍になっても、ランドルト環の大きさが $\frac{1}{2}$ 倍、$\frac{1}{3}$ 倍になっていないことがあり、表から視力とランドルト環は反比例の関係であることに気づく生徒は少なかった。しかし、生徒のほとんどが、グラフ



【図 16】生徒のワークシート

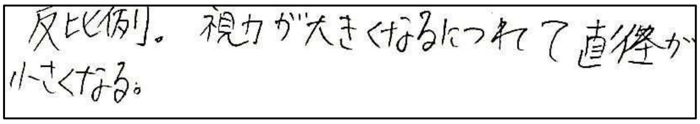


【図 17】生徒のワークシート

[4] 視力検査表にある大きさの異なるＣ字型の環のこと。スイスの眼科医エドムント・ランドルトによって開発され、彼の名前がそのままの名称となっている。

をかき、表の変化とグラフの形から視力とランドルト環は反比例の関係であることに気づくことができた。

視力とランドルト環の関係とその理由を説明するワークシートには、【図16】のようにグラフと表の変化から理由を書いている生徒や、【図17】のように表から理由を書いている生徒がいた。しかし、【図18】【図19】のように反比例と考えた理由を数学的な表現（用語）を用いて書くことができなかった生徒が30%程度いた。



【図18】生徒のワークシート

【図19】生徒のワークシート

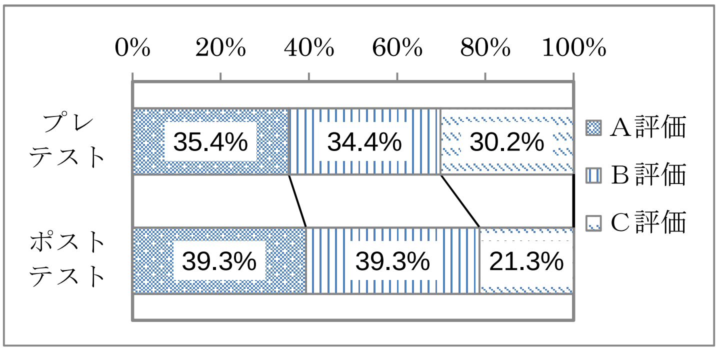
2　結果

(1)　プレテストとポストテストに見る生徒の変化

ルーブリック【資料２】【資料３】をもとにプレテスト【資料６】、ポストテスト【資料７】の記述を評価し、生徒の変化を検証する。また、第２時の家庭学習での問題づくり【資料13】とポストテストでの問題づくりについても、同様に検証する。

①　ともなって変わる２つの数量を求める「数学化」【図20】

プレテストでは、ともなって変わる２つの数量のうち、解答に必要な数量を２つとも記述しているＡ評価の生徒は35.4%だった。ともなって変わる２つの数量のうち、解答に必要な数量の記述が不十分だったため、Ｂ評価になった生徒は34.4%だった。



【図20】ともなって変わる２つの数量を求める「数学化」

ポストテストでは、ともなって変わる２つの数量のうち、解答に必要な数量の記述が不十分だったため、Ｂ評価になった生徒は39.3%だった。

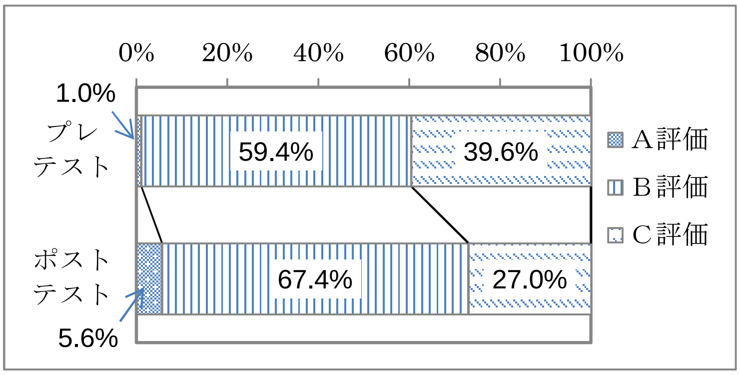
プレテスト・ポストテストを比較すると、ともなって変わる２つの数量を求めることのできるようになったＢ評価以上の生徒は69.8%から78.6%に増加した。

②　多様な考え方をする「数学化」【図21】

プレテストでは、２通りの考え方をし、Ａ評価になった生徒は1.0%だった。１通りの考え方をし、Ｂ評価になった生徒は59.4%だった。

ポストテストでは、２通りの考え方をし、A評価になった生徒は5.6%だった。1通りの考え方をし、B評価になった生徒は67.4%だった。

プレテスト・ポストテストを比較すると、言葉や数、式、図、表などを用いて、考えることができるようになった生徒は60.4%から73%に増加した。

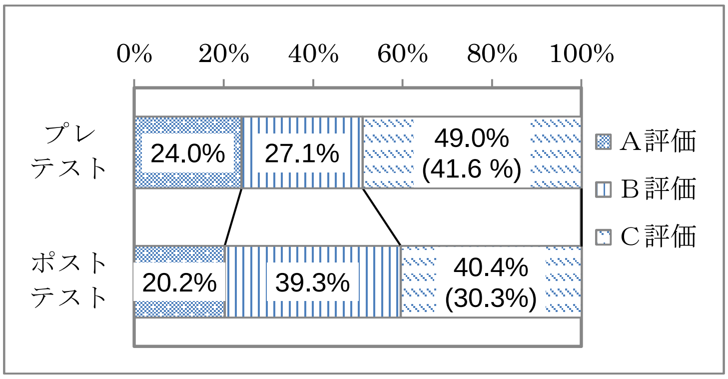


【図21】多様な考え方をする「数学化」

③ **自分の考えを説明する「表現」【図22】**

プレテストでは、使っている値や、値の根拠が不十分な説明でB評価になった生徒が27.1%だった。C評価は49.0%で、そのうち「無解答」の生徒は41.6%だった。

ポストテストでは、どれだけ先に着くかの時間が間違っていたり、不十分な説明になっていたりしたためB評価になった生徒が39.3%だった。C評価は40.4%で、そのうち「無解答」の生徒は30.3%だった。



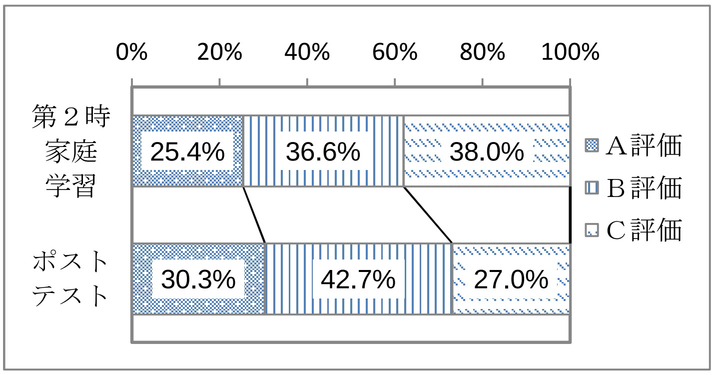
【図22】自分の考えを説明する「表現」

（カッコ内の数字：無解答だった生徒の割合）

プレテスト・ポストテストを比較すると、結論だけや無解答の生徒は49%（41.6%）から40.4%（30.3%）に減少し、自分の考えを書こうとする姿が見られた。

④ **問題づくり「数学化」【図23】**

第２時の家庭学習での問題づくりでは、１問以上の問題をつくることができたB評価以上の生徒は62%になり、半分以上の生徒が関数の問題をつくることができた。また、複数の問題をつくることができたA評価の生徒は25.4%だった。



【図23】問題づくり「数学化」

ポストテストでの問題づくりでは、１問以上の問題をつくることができたB評価以上の生

徒は73%だった。また、複数の問題をつくることができたA評価の生徒は30.3%だった。そのうち、24.7%が比例・反比例両方の問題をつくっていた。その中で、１人の生徒は第12時で行った「温める時間が電子レンジの出力に反比例すること」を利用して問題をつくっていた。

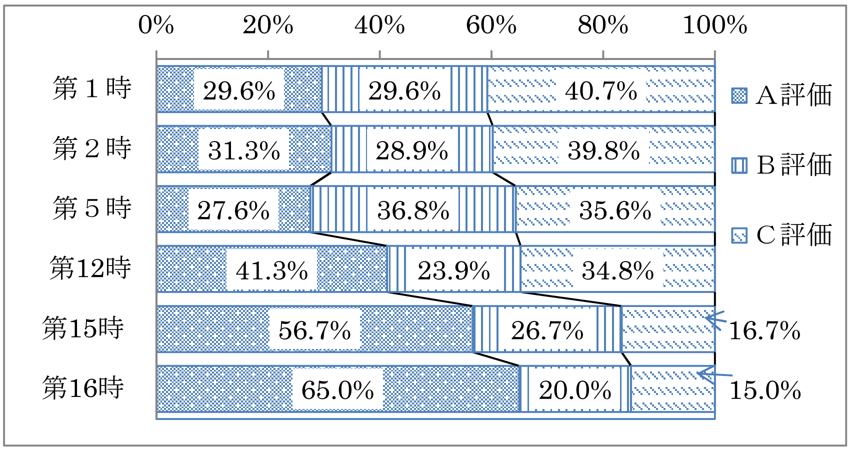
第２時の家庭学習とポストテストを比較すると、ともなって変わる２つの数量を考え、関数の問題をつくることができるようになった生徒が62%から73%に増加した。

⑵ 授業における基本的な数学の能力「数学化」「表現」の変化

ルーブリック【資料３～５】をもとに授業におけるワークシートの記述を評価し、本研究において重視する「基本的な数学の能力」の中の「数学化」「表現」について生徒の変化を検証する。

① 「数学化」【図24】

第５時では、プールの水を止める時間を考えた。第１時、第２時と比べると、数学的に処理することが増えたため、A評価の生徒は第２時から 3.7%減少したと思われる。



【図24】「数学化」

第12時では、電子レンジで温める時間を考えた。反比例の考え方を使うが、第５時と同様の問題だったため、第５時と比べ、A評価になった生徒が13.7%増加したと思われる。

第15時のマラソン、第16時のランドルト環では、ともなって変わる２つの数量関係について考えた。比例・反比例の関係であることに気づくことができたB評価以上の生徒はそれぞれ83.4%、85%だった。

これらのことから、単元の終盤において、80%以上の生徒が現実世界における問題の中で、関数の関係を見つけ、関数を使って考えようとする姿が見られた。

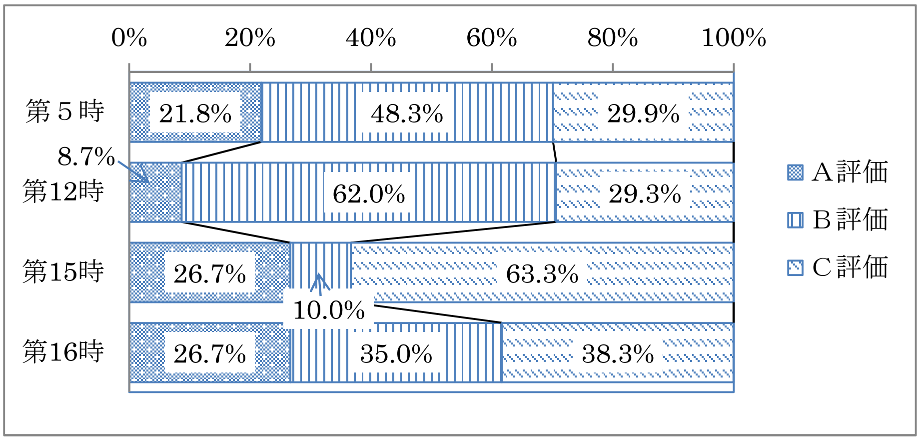
② 「表現」【図25】

第５時、第12時では、自分の思考過程をわかりやすく表現しているA評価の生徒はそれぞれ21.8%、8.7%だった。絵や図、表を記入しているが、わかりやすく表現していなかったため、B評価になった生徒はそれぞれ48.3%、62%だった。

第15時、第16時では、事柄が成り立つ理由を自分の言葉で表現しているが、数学的な

表現（用語）を用いて説明していないため、B評価になった生徒はそれぞれ10%、35%だった。

これらのことから、自分の考えを示すために、数量関係を表、式、グラフを用いて、自分の思考過程を表現したり、自分の言葉で説明したりする姿は見られたが、数学的な表現（用語）を用いて根拠や理由を説明することができた生徒は26.7%と少なかった。

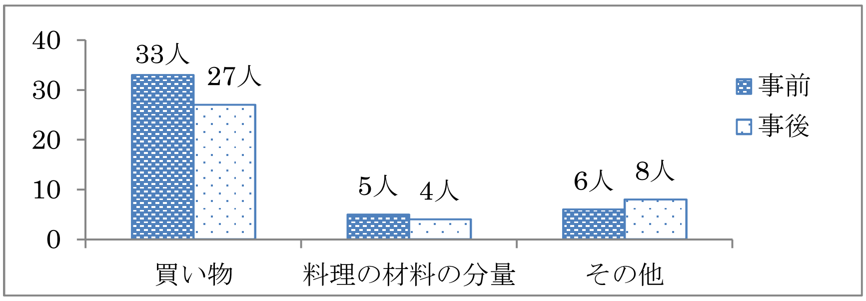


【図 25】「表現」

⑶　日常生活で数学を活用することについて【図 26】【図 27】

事前意識調査（93 人回答）では、「⑽の日常生活で数学を活用した具体的な場面」を記述する問いに対して、36 人（複数回答４人）が回答しており、お金の計算（代金、割引、消費税）が 33 人と最も多く、次に、料理の材料の分量は５人だった。その他は６種類で５人だった。また、１人の生徒はお金、料理の材料の分量以外に、その他の内容を複数記述しており、道のりを求めることや物を分けること、理科の濃度、密度の計算や社会での年数の計算など他教科での活用についても記述していた。

事後意識調査（91 人回答）では、⑽の問いに対して、34 人（複数回答４人）が回答しており、お金の計算



【図 26】日常生活で数学を活用する具体的な活用場面

具体的な活用例	事前（人）	事後（人）
委員会でプランターにどれだけ球根を入れるか	1	
ゲーム	1	
物を分けるとき	1	
理科の濃度、密度の計算	1	
社会の年数の計算	1	
道のりの計算	1	1
天気予報での温度変化		2
方程式・比例が速度の計算で使える場面がある		1
カルピスを作るときの原液と水の割合		1
数学で使う等しいという言葉の意味を知り、日常でも使うようになった		1
使ったことはないが、数学は日常生活で使えると思った		1
使ったことはないが、今度活用できたらいいと思う		1

【図 27】その他の回答内容

が 27 人と最も多く、次に、料理の材料の分量が４人だった。その他は７種類で８人だった。また、その他の内容を複数記述している生徒はいなかった。

事前・事後を比較すると、具体的な場面を記述した生徒は減少したが、その他の回答の人数と具体的な場面について変化があった。

３　考察

⑴　本研究で育てたい「数学的な思考力」

「基本的な数学の能力」の中の「数学化」「表現」に重点を置いて、授業づくりや指導を行うことは、「数学的な知識・技能を活用する力」をつけるために有効であると以下の２点から示唆される。

第１に、「関数分野において育てたい『数学的な思考力』」【表３】を作成し、「基本的な数学の能力」の中の「数学化」「表現」に限定し、研究を行った。そうすることで、教師の授業づくりや指導上の視点を明らかにすることができ、生徒たちが見通しを持って学習に取り組むことができたと以下のことから推察できる。

「数学化」については、日常生活の事象を積極的に問題に取り入れることを行った。そのことにより、生徒たちは今までの経験からともなって変わる２つの数量について具体的にイメージすることができ、それらの数量関係を把握し、関数の関係を使って考えることができるようになったと思われる。「表現」については、表、式、グラフを用いて考えることや、友だちと意見を交流する場面を意図的に設定した。そのことにより、生徒たちは表、グラフを使うことが数量の規則性や関係を見つけるために有効であることや、表、グラフを活用することの良さを実感することができたと思われる。また、そうした学習活動を通して、自分の考えを深めることができたと推測する。

それらのことは、ルーブリックの評価【図 20】【図 21】【図 22】において、プレテストと比べて、ポストテストの評価に変化が見られたことや、授業における基本的な数学の能力「数学化」の評価【図 24】においても変化が見られたことから判断できる。

第２に、作成した【表３】の「関数での具体的な数学的な知識・技能を活用する力」（A）（B）（C）（D）を意識して、学習指導案づくりや実際に授業を行ったことは、「数学的に状況を定式化すること」の具体的な活動【表１】の項目の中から重視した４項目（ア）（イ）（オ）（ク）の具体的な活動を充実させせることに有効であったと考えるからである。そのことについても、上記の評価結果から判断できる。

しかし、検証を進める中で、「基本的な数学の能力」の中の「数学化」「表現」に重点を置いて授業を行ったことは、重視した４項目以外の（ウ）（エ）（カ）に対しても有効であったと以下のような生徒たちの姿から推測できる。

まず、第１時、第２時で行った、身の回りで関数の関係であるものを見つける活動の中で【図２】のように自分で設定を考える生徒がいたことや、第２時の家庭学習での問題づくりと、ポ

ストテストでの問題づくりを比較して、B評価以上【図 23】の生徒が増加していたことは、日常生活の事象の中で、（カ）の「数学的な概念を用いて問題を構成したり、適切な仮定をおいたりする」活動で、身近な事象を数学的な状況に定式化し、関数にすることができた生徒がいたことが読み取れる。

次に、第５時、第 12 時で【図６】【図７】【図８】【図９】のように表をつくって、考えている生徒がいたことは、日常生活の事象の中から（ウ）の「状況や問題を単純化して数学的な分析をしやすくする」活動や、（エ）の「文脈から抽出された数学的モデル化や単純化の背後にある制約や仮定を見つける」活動で、ともなって変わる２つの数量の変化や規則性を見つけ、解決のための糸口や見通しを持とうとする生徒がいたことが読み取れる。

これらの姿から、今回は「数学的に状況を定式化すること」の具体的な活動【表１】の４項目に限定し研究を進めたが、「基本的な数学の能力」の中の「数学化」「表現」を育成することに、10 項目すべてが深く関わっていることが考えられる。授業において、いつも【表１】のすべての内容を重視することは難しいが、指導する際には、意識する必要があると思われる。

⑵ 「数学的な思考力」を育てる３つの手だて

数学的な思考力を育てるために行った３つの手だてについて考察する。

① 数学の問題に日常生活の事象を取り入れる

数学を活用して解決をすることができる日常生活の事象に関連した問題を、授業に意図的に取り入れることは、数学の有用性を実感させることや、数学的な見方・考え方を育てるという点で有効であると推察される。

このことは、事前意識調査と事後意識調査【図 26】【図 27】を比べ、数学を活用した場面の記述内容に変化があったことや、事前意識調査では具体的な場面を記述できなかった生徒９人が、事後意識調査では具体的な場面を記述したことから示唆される。

事前・事後意識調査では、ともにお金の計算の際に数学を活用していると記述している生徒が多かった。これは、お金の計算は身近で、日常生活とのつながりが深いことが要因であると考えられる。次に多かった、料理の材料の分量の計算についても、料理をする際に、自ずと必要に迫られるからだと考えられる。

事前意識調査ではなかった「数学で等しいという言葉の意味を知り、日常でも使っている」「方程式、比例が速度の計算で使える」「使ったことはないが、数学は日常生活で使えると思ったことがある」「使ったことはないが、今後活用できたらよいと思う」などの記述が事後意識調査においては見られた。これらの記述は、生徒が数学を活用すれば、日常生活や社会に関わる事象に関連した問題を解決することができるといった数学の有用性を実感した結果であり、生徒の数学的な見方・考え方を育てることにつながったためだと考える。また、次期学習指導要領にも示されているように、単に数学の問題を解かせるだけでなく、日常生

活の事象を教材化したり、数学的な見方・考え方が社会で役立つ場面を紹介したりする授業の積み重ねがますます重要になってくるだろう。

② 生徒の思考過程を表現するワークシートの活用

生徒の思考過程を表現するワークシートの活用は、自分の思考過程や解き方を表現することには有効であった。しかし、相手にわかりやすく表現することや、数学的な表現（用語）を用いて根拠や理由を説明する表現力を高めるまでには至らなかった。

このことは、ルーブリックの評価【図 22】において、プレテストと比べて、ポストテストでＣ評価は減少したが、授業における基本的な数学の能力「表現」の評価【図 25】には、あまり変化が見られなかったことから判断できる。

今回の研究において、ワークシートに「どのように考えたのか、計算式、言葉、図、表、矢印、絵などを使い、考えた過程がわかるように工夫して書きましょう」と指示した。これによって、絵や図、表をかいている生徒が増えたため、ルーブリックの評価においてＣ評価の生徒が少なくなり、Ｂ評価の生徒が多くなった。これまで、簡単に解き方を書いていたり、途中の式しか書いていなかったりする生徒や数学が苦手な生徒にとって、絵や図、表などを用いて自分の思考を整理し、解き方や考え方を表現することについては手だてが有効であったと考える。Ｂ評価の生徒の多くは、自分の解き方や途中の式を書くことや、「事柄が成り立つ理由」を自分の言葉で書くことについてはできていた。一方で、解き方や考え方をわかりやすく表現したり、数学的な表現（用語）を用いて説明したりすることのできていない生徒【図 15】【図 18】【図 19】もいた。

このような生徒の様子から、これらの生徒の表現力を高める指導として、次のような手だてを考える。生徒が数学的な表現でない表現をした際に、教師はまず、それをそのまま板書し、板書した表現を残したまま数学的な表現に直すなど視覚的な工夫を行う。それを生徒もノートなどに同様の修正を行い、表現を変更したことが残るノートづくりを丁寧に指導する方法である。今後、このような手だてを模索し、その有効性について検証する必要があると考える。

③ 「四日市モデル」第５プロセスの活用

第５プロセスにおいて、日常生活の事象を解決する問題を取り上げることは、数学的な思考力を高めるために有効であると考え実践を行ったが、生徒の学習活動や考える時間を十分に確保できなかった授業もあり、有効であったかどうか十分な検証には至らなかったものの、以下のことが示唆される。

第２時【資料 12】では、第１プロセスから第４プロセスおいて、比例以外の関数についても考えることができる図形の問題を使い、ともなって変わる２つの数量を表、グラフ、式で表す授業を展開した。その後、第５プロセスでは、【資料 13】を出題した。【資料 13】は、比例

以外の関数も含んでおり、日常生活の事象の問題であったため、数学的な思考力を高めることに有効な教材であると判断したからである。

しかし、第２時の授業のあと、研究協力員からは、「数学が得意な生徒も苦手な生徒も、数学的な思考力を高めるには日頃から授業の中で、日常生活の事象を考える問題を行うこと大切だが、この授業内容であるならば、第５プロセスは日常生活の事象の問題【資料 13】ではなく、第１プロセスから第４プロセスで扱った図形を教材にした問題を取り組んだ方が、生徒が今回の授業で身につけた知識・技能を活用できたのではないか」との意見があった。

一方、【資料 16】にある問題を第５プロセスに設定して、第３時に行うクラスと第５時に行うクラスと分けて授業を行った。第３時で行ったクラスにおいては、比例の式について詳しく学習していなかったため、比例の式を使って考えている生徒はいなかった。しかし、第５時で行ったクラスにおいては、第１プロセスから第４プロセスで学習した比例の式を使って考えている生徒がいた。このことから、第１プロセスから第４プロセスで定着させる知識・技能によって、生徒が第５プロセスで活用する知識・技能に違いがあることが推測できる。

以上のことから、第５プロセスで日常生活の事象を解決する問題を取り上げることや、第１プロセスから第４プロセスで身につけた知識・技能を活用できる問題を取り入れることは、数学的な思考力を高めるために有効であると推察する。しかし、第５プロセスに十分な時間が取れなかったり、第５プロセスが授業時間内に収まらなかったりする現状がある。そこで、第５プロセスに取り組ませるための時間を確保できるように、逆算して授業を組み立てることが必要である。また、第１プロセスから第４プロセスの中で、数学的な知識・技能を活用する基礎となる内容や、教材を考えるなど、さらなる授業改善と、第５プロセスの意義や、知識・技能の定着を図る指導の見直しと改善を繰り返し行っていく必要があると考える。

Ⅵ　研究のまとめ

１　研究の成果

本研究では、プレテストとポストテストを比べて、「基本的な数学の能力」の中の「数学化」が 10.7%、「表現」が 8.4%の向上が見られたことから、身につけた数学的な知識・技能を活用して日常生活の事象を扱った問題を解決することは、「数学的な思考力」を高めることに効果があることはおおむね明らかになった。

「関数分野における育てたい『数学的な思考力』」【表３】は、育てたい「数学的な思考力」つまり、「数学的な知識・技能を活用する力」を具体的に設定することができた。このことから、教師がこれらの力をつけるために「数学的に状況を定式化すること」の具体的な活動【表１】を意識して、「基本的な数学の能力」の中から「数学化」「表現」に重点を置いて、授業に取り組む必要があると明らかになった。しかし、【表１】のすべての内容をいつも意識して授業を行うことは単元の特徴や時間的にも難しいと思われる。本研究のように【表１】から重視する項目を限定し、分野・単元に応じて、生徒の状況から育成する「基本的な数学の能力」【表２】を考え、

どのような力をつけたいのかを【表３】のように、「その分野・単元における『数学的な思考力』」を具体的に設定し、意識して教材研究や授業を行うことは「数学的な知識・技能を活用する力」をつけるために有効であるといえるだろう。

授業で日常生活の事象を扱った問題を取り入れたことによって、問題が身近な日常生活の事象であったため、生徒は問題とよく似た経験をしていることから、問題に興味・関心を持つことができた。そして、計算式、図や表を使い、これまで身につけた数学的な知識・技能を活用して、どのように考えるとよいか、自分の思考を整理しながら試行錯誤し、他者と話し合い、問題を解こうとする生徒の姿が見られた。このことは、意欲的な態度や数学的な見方・考え方を育てることになったと考える。

また、数学的な思考力を高めるため、生徒に思考過程を表現させたことで、既習の知識・技能を活用していることを可視化でき、教師は生徒の知識・技能の定着を確認することができた。しかし、数学的な表現力については、自分の解き方や途中の式を書くことだけに留まっている生徒もおり、言葉や数、式、図、表、グラフなどを用いて、解き方や考え方をわかりやすく表現する力の育成や、数学的な表現をさせるための指導の効果については、十分に検証することができなかった。

「四日市モデル」第５プロセスの活用においては、日常生活の事象を解決する問題を取り上げることや、第１プロセスから第４プロセスで身につけた知識・技能を活用できる問題を取り入れることは、数学的な思考力を高めるために有効であると示唆された。

２　研究の課題

本研究では、数学的な思考力を高めるとともに、表現力を高めることにもつながると考え、ワークシートの活用を行ったが、自分の思考過程を書くことだけに留まり、「わかりやすく表現すること」「数学的な表現を用いて根拠や理由を表現すること」などの表現力を高める手だてが十分ではなかった。

今回の研究は比例・反比例の一単元で実践を行ったが、日常生活の事象の中には、比例、反比例以外の関数を利用しているものも多い。今後は、一次関数、２次関数などの関数分野を含め、他の分野においても生徒が興味・関心を持ち、数学の有用性を感じ、意欲的な態度や、数学的な見方・考え方を育てる研究を進めることが必要である。

また、「四日市モデル」第５プロセスで、授業のまとめや振り返りは行うことができたとしても、今回の実践のような日常生活の事象に関連した問題を、すべての授業において第５プロセスを扱うことは授業時間を考えると難しいと思われる。したがって、第５プロセスをどの授業で行うのか、どのような問題を取り扱うことが「数学的な思考力」を高めることに有効であるかを検証する必要があると考える。

さらに、次期学習指導要領に示されている「主体的・対話的で深い学び」や、四日市市の問題解決能力の向上のための授業づくりの取り組みは、子どもたちに必要な資質・能力の育成を重視

している。これらの資質・能力を育成するために、各教科等で身につけた見方・考え方を実生活のさまざまな場面で活用できる汎用的な能力を育てることが必要となる。そのため、数学的な思考力を高めるために、本研究で行った「数学的に状況を定式化すること」や「基本的な数学の能力」を意識的に取り入れるとともに、日常生活の事象を数学と結びつけるなど、数学的な見方・考え方が豊かで確かなものとなっていく学習方法について、今後ますます研究が必要である。

［引用文献］

国立教育政策研究所（2016）「PISA2012 年　調査評価の枠組み」　明石書店　ｐｐ．38、43、46

中央教育審議会（2016）「幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申）」　ｐｐ．140、141

四日市市教育委員会（2013）「問題解決能力向上のための授業づくりガイドブック　四日市モデル」ｐｐ．1-5

［参考文献］

国立教育政策研究所（2006）「特定の課題に関する調査（算数・数学）調査結果（小学校・中学校）」

国立教育政策研究所（2007）「PISA2006 年　調査評価の枠組み」　明石書店

国立教育政策研究所（2012）「全国学力・学習状況調査の４年間の調査結果から今後の取組が期待される内容のまとめ～児童生徒への学習指導の改善・充実に向けて～　中学校編」

国立教育政策研究所（2004）「生きるための知識と技能２　OECD 生徒の学習到達度調査（PISA）2003 年調査国際結果報告書」　明石書店

国立教育政策研究所（2010）「生きるための知識と技能４　OECD 生徒の学習到達度調査（PISA）2009 年調査国際結果報告書」　明石書店

国立教育政策研究所（2013）「生きるための知識と技能５　OECD 生徒の学習到達度調査（PISA）2012 年調査国際結果報告書」　明石書店

清水美憲（2007）「国際機関によって提示された『数学的リテラシー』の概念規定」

高浦勝義・松尾知明・山森光陽（2006）「ルーブリックを活用した授業づくりと評価　②中学校編」教育開発研究所

中央教育審議会　教育課程企画特別部会（2015）「論点整理」

中央教育審議会　教育課程部会（2016）「次期指導要領等に向けたこれまでの審議のまとめ」

松下佳代（2007）「パフォーマンス評価－子どもの思考と表現を評価する－」日本標準

文部科学省（2008）「中学校学習指導要領解説　数学編」教育出版株式会社

文部科学省・国立教育政策研究所（2015）「平成 27 年度　全国学力・学習状況調査　報告書」

四日市市教育委員会（2015）「平成 27 年度全国学力・学習状況調査結果の分析」

四日市市教育委員会（2016）「第３次四日市市学校教育ビジョン」

四日市市教育委員会（2016）「平成 28 年度全国学力・学習状況調査結果の分析」

【資料１】

第５プロセスの活用を行った実践授業

節	項	授業時間数	第５プロセスの活用
１節 関数	１．関数	第１時	身の回りで関数の関係であるものを見つける。
		第２時	関数であるものと関数でないものを選ぶ
２節 比例	１．比例の式	第３時	
		第４時	
		第５時	プールの水を止める時間を考える。
	２．座標	第６時	
	３．比例のグラフ	第７時	
		第８時	
		第９時	
３節 反比例	１．反比例の式	第 10 時	
		第 11 時	
		第 12 時	レンジで温める時間がレンジの出力（w）に反比例する事象を利用して考える。
	２．反比例のグラフ	第 13 時	
		第 14 時	
４節 比例・反比例の利用	１．比例・反比例の利用	第 15 時	比例の利用 マラソンのラップタイムと距離の表やグラフを用いて、ラップタイムと距離が比例の関係であることを利用して、ゴールの時間を考える。
		第 16 時	反比例の利用 視力測定のランドルト環が、視力とランドルト環の大きさが反比例の関係であることを利用して考える。

【資料２】

○ルーブリック（プレテスト、ポストテスト）

プレテスト

問題番号	観点	観点の内容	A（十分満足3点）	B（おおむね満足2点）	C（努力を要する1点）
問（1）	数学化	事象の中にある数量から、問題を求めるのに必要な数量を見つけるができる。	2つの数量について、2つとも記入している。 **（例）一人が買う時間、並んでいる人数**	2つの数量について、十分でないが記述してある。 **（例）時間、人数、映画の始まる時間、自分が買うまでの時間、今の時間**	無記入。2つの数量について、1つしか記入していない。または関係のない数量が記入してある。
問（2）	数学化	式、図、表などを用いて、いろいろな求め方で考えることができる。	式、図、表などを用いて、2種類以上の考え方をしている。	式、図、表などを用いて、1種類の考え方をしている。	無記入。または、正解までたどりついていない。数学的な考え方を使って求めていない。
	表現	映画に間に合うかどうか説明することができる。	式、表、言葉の根拠をもとに十分に説明されている。	説明しているが、根拠がやや不十分である。 **（例）時間を分数のまま考えている。** **結論が書いてない。**	無記入。または結論のみで説明がなされていない。

ポストテスト

問題番号	観点	観点の内容	A（十分満足3点）	B（おおむね満足2点）	C（努力を要する1点）
問1	数学化	身の回りで関数の関係であると考えられ事柄を見つけることができる。	身の回りで関数の関係である事柄を見つけ、2つ以上問題をつくることができた。	身の回りで関数の関係である事柄を見つけ、1つ問題をつくることができた。または、複数つくってあるが、比例、反比例の判断が間違っている。	無記入。または、関数ではない事柄を記入している。
問2（1）	数学化	事象の中にある数量から、問題を求めるのに必要な数量を見つけることができる。	2つの数量について、2つとも記入している。 **（例）けいたさんの道のりと速さ、あきらさんの道のりと速さ** **けいたさんが学校に着くまでにかかる時間、あきらさんが学校に着くまでにかかる時間**	2つの数量について、十分でないが記述してある。 **（例）道のり、速さ、時間**	無記入。2つの数量について、1つしか記入していない。または関係のない数量が記入してある。
問2（2）	数学化	式、図、表、グラフなどを用いて、いろいろな求め方で考えることができる。	式、図、表、グラフなどを用いて、2種類以上の考え方をしている。	式、図、表、グラフなどを用いて、1種類の考え方をしている。	無記入。または、正解までたどりついていない。数学的な考え方を使って求めていない。
	表現	どちらがどれだけ先に着くか説明することができる。	式、表、言葉の根拠をもとに十分に説明されている。	説明しているが、根拠がやや不十分である。 **（例）時間を分数、小数のまま考えている。**	無記入。または結論のみで説明がなされていない。 **（例）どれだけ先に着くかが説明されていない。**

○ルーブリック（第１時、第２時、第２時宿題）

第1時	観点	観点の内容	A（十分満足3点）	B（おおむね満足2点）	C（努力を要する1点）
身の回りで関数の関係であるものを見つける。	数学化	身の回りでともなって変わる2つの数量を見つけ、関数の関係であると考えることができる。	身の回りでともなって変わる2つの数量のうち、関数の関係であるものを2つ以上考えることができた。	身の回りでともなって変わる2つの数量のうち、関数の関係であるものを1つは考えることができた。または、複数考えることができたが、関数の関係でないものが含まれている。 **（例） x 、 y を逆にすると関数の関係でないものがある。**	無記入。または、ともなって変わる2つの数量でないものを記入している。

第2時	観点	観点の内容	A（十分満足3点）	B（おおむね満足2点）	C（努力を要する1点）
関数であるものと関数でないものを選ぶ。	数学化	yがxの関数であるものと関数でないものを選び、関数でない理由を説明することができる。	関数であるものと関数でないものを選び、関数でないものは式、表、言葉を使い、自分の考えを説明することができる。 **（例）関数でないことを具体例を挙げて記入している。 関数の定義を用いて説明している。**	関数であるものと関数でないものを選ぶことができる。または、関数でない理由を十分ではないが、説明している。	無記入。または、関数であるものと関数でないものを正しく選ぶことができていない。

家庭学習	観点	観点の内容	A（十分満足3点）	B（おおむね満足2点）	C（努力を要する1点）
yがxの関数である問題をつくる。	数学化	yがxの関数である問題をつくることができる。	yがxの関数である問題を複数つくることができた。または、関数である問題と関数でない問題を区別して、つくることができた。	yがxの関数である問題を1つつくることができた。	無記入。または、yがxの関数でない問題を関数である問題としてつくっている。

○ルーブリック　（第５時、第 12 時）　　　　　　　　　　　　　　　　【資料４】

第5時	観点	観点の内容	A（十分満足3点）	B（おおむね満足2点）	C（努力を要する1点）
水を止める時刻を求める。	数学化	比例の関係であることに気づき、比例の考え方を使って水を止める時刻を求めることができる。	比例の関係であることに気づき、比例の考え方を使って、水を止める時刻を求めている。 **（例）比例の式ｙ＝axを使って求めている。 比　a:b=c:dの考え方を使い、比例式から求めている。 1時間あたりに入る水の量を求めて考えている。**	比例の関係であることに気づき、比例の考え方を使っているが、答えまで至っていない。または、比例の考え方を使っていない。 **（例）水を止める時刻が求められていない。 表を使って、考えている。 １時間あたりに入る水の量は求められている。**	無記入。または、結論のみ。
	表現	計算式、言葉、図、表、絵などを使い、考えた過程を書く	計算式、言葉、図、表、絵などを使い、考えた過程がわかりやすくに書いている。	計算式、言葉、図、表、絵などを使い、考え方を書いている。 **（例）解答が正しくなくても、自分の考えを書いている。**	無記入。または、計算や数がメモしてある。

第12時	観点	観点の内容	A（十分満足3点）	B（おおむね満足2点）	C（努力を要する1点）
電子レンジの時間を設定することができる。	数学化	反比例の関係であることを使い、電子レンジで温める時間を求めることができる。	反比例の関係であることから式、表を使って、電子レンジで温める時間を求めている。 **（例）反比例の式y=a/xを使って求めている。 Xの値が6/5倍になるとｙの値が5/6倍になることを使って求めている。**	反比例の関係であることを使っているが、答えまで至っていない。	無記入。または、反比例の関係であることを利用していない。反比例の式がつくれていない。 **（例）比　a:b=c:dの考え方を使い、比例式から求めている。**
	表現	計算式、言葉、図、表、絵などを使い、考えた過程を書く	計算式、言葉、図、表、絵などを使い、考えた過程をわかりやすく書いている。	計算式、言葉、図、表、絵などを使い、考え方を書いている。 **（例）解答が正しくなくても、自分の考えを書いている。**	無記入。または、計算や数がメモしてある。

【資料５】

○ルーブリック　（第 15 時、第 16 時）

第15時	観点	観点の内容	A（十分満足3点）	B（おおむね満足2点）	C（努力を要する1点）
ゴールするまでの時間を予想する。	数学化	表やグラフから比例の関係であることに気づき、ゴールするまでの時間を予想することができる。	比例の関係であることに気づき、比例の考え方を使い、ゴールするまでの時間を求めている。 **（例）比例の式ｙ＝axを使って求めている。 グラフをかき、グラフから求めている。 表の変化の様子から求めている。**	比例の関係であることに気づき、比例の考え方を使っているが、答えまで至っていない。	無記入。または、結論のみで、考え方が記入されていない。
距離とタイムの関係について説明する。	表現	根拠をもとに、距離とタイムは比例の関係であることを説明することができる。	比例の関係であることの根拠が十分に説明されている。 **（例）x/ｙの値が一定であること 式で表すとy＝axの形になること グラフをかくと原点を通る直線になること**	比例の関係であることの根拠が十分ではないが、自分の考えを記述している。 **（例）グラフから、式から等、グラフや式の内容について書かれていない。**	無記入。または結論だけや計算の求め方を書いており、比例の関係であることについて説明がなされていない。 **（例）比例、関数としか書いていない。**

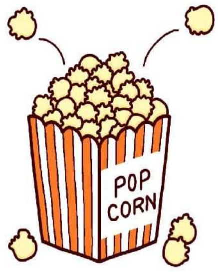
第16時	観点	観点の内容	A（十分満足3点）	B（おおむね満足2点）	C（努力を要する1点）
視力とランドルト環の関係について考えることができる。	数学化	表・グラフを使い、視力とランドルト環の関係について考えることができる。	表とグラフの両方を使って、視力とランドルト環の関係について考えている。	表かグラフどちらかを使い、視力とランドルト環の関係について考えている。	無記入。または、途中までしか、考えていない。
視力とランドルト環の大きさについての関係について説明する。	表現	根拠をもとに、視力とランドルト環の大きさに反比例の関係であることを説明することができる。	反比例の関係であることの根拠が十分に説明されている。 **（例）ｘｙの値が一定であること 式で表すとｙ＝a/xの形になること グラフが双曲線になること**	反比例の関係であることの根拠がやや不十分である。 **（例）グラフから、式から等、グラフや式の内容について書かれていない。**	無記入。または結論のみで説明がなされていない。 **（例）反比例、関数としか書いていない。**

待ち時間は何分　　（プレテスト）

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　）

問　かりんさんは、友だちと一緒に映画館に来ました。映画を見る前にポップコーンを買おうと思います。次の問に答えなさい。

（1）かりんさんは映画が始まる時間を考えると、並び始めてから買い終わるまで、どのくらいの時間を待てばよいか気になっています。待ち時間を予想するには、どんなことがわかればよいか書きなさい。



（2）　かりんさんは、10 時 10 分から始まる映画を見ます。今、9 時 57 分です。かりんさんの前に並んでいた人が、5 分で 8 人買い終わりました。かりんさんは前から 12 番目に並んでいます。映画が始まるまでにポップコーンを買うことはできますか。いろいろな考え方で求めなさい。また、映画に間に合うかどうか説明しなさい。

　どのように考えたのか、計算式、言葉、図、表、矢印、絵などを使い、考えた過程がわかるように工夫して書きなさい。

＜考え方＞

＜映画に間に合うかどうか説明しなさい＞

どちらが先に着く　　（ポストテスト）

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

問１　身の回りにある関数の関係で、下の例のような問題を、たくさん作りなさい。また、作った問題が比例であるものは比例、反比例であるものは反比例と書きなさい。それ以外の関数であるものは問題だけ書きなさい。

（例）１枚 x 円のコピーを 10 枚とったときの料金 y 円　比例

問２　けいたさんは自転車で、あきらさんは徒歩で学校に通学しています。次の問に答えなさい。

（１）けいたさんとあきらさんはそれぞれ８時に家を出て学校へ行きます。どちらが先に着くか予想するには、どんなことがわかればよいか書きなさい。

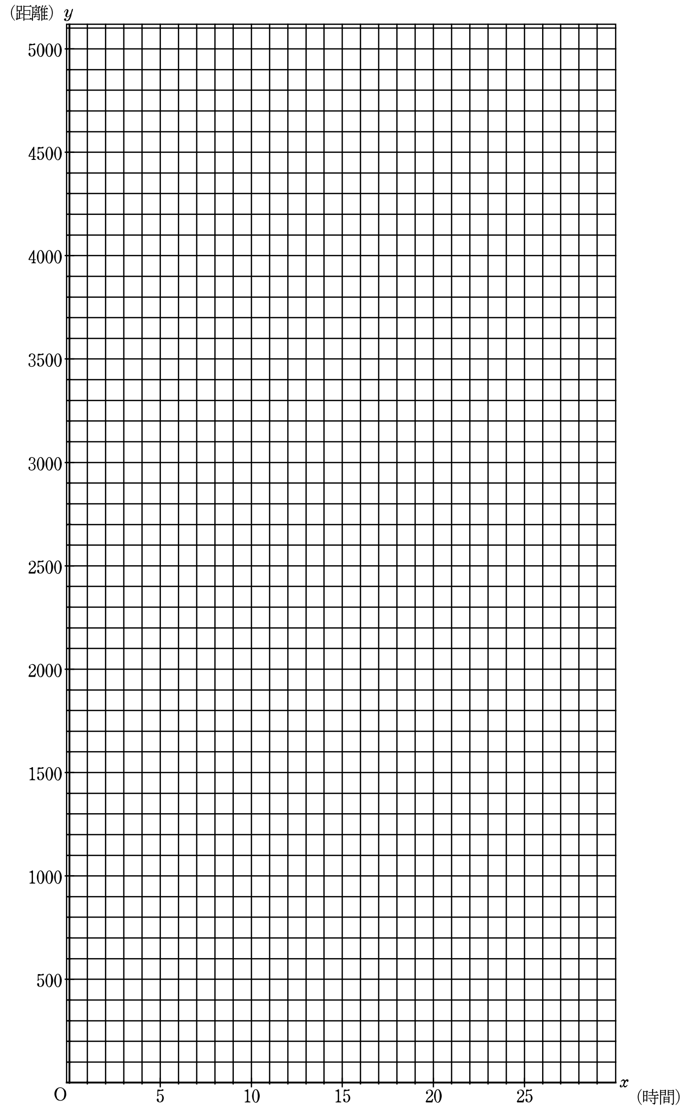
（２）　けいたさんは学校まで4.8 km の道のりを分速240 m で、あきらさんは学校まで 1.5 km の道のりを分速 80 m で進みます。

２人とも８時に家を出ました。どちらが先に学校へ着きますか。また、どちらがどれだけ先に着きますか。いろいろな考え方で求め、説明しなさい。

どのように考えたのか、計算式、言葉、図、グラフ（裏面）、矢印、絵などを使い、考えた過程がわかるように工夫して書きなさい。

＜考え方＞

＜どちらがどれだけ先に着くか説明しなさい＞



【資料８】

2016年　　月　　日　実施

数学についてのアンケート

組　　番　名前＿＿＿＿＿＿

「数学」についてのアンケートです。あてはまるものに〇をつけてください。

（１）「数学」の勉強は好きですか。

ア　はい　　イ　どちらかといえば、はい

ウ　どちらかといえば、いいえ　　エ　いいえ

（２）「数学」の授業の内容はよくわかりますか。

ア　はい　　イ　どちらかといえば、はい

ウ　どちらかといえば、いいえ　　エ　いいえ

（３）問題を解くとき、「もっと簡単に解く方法はないか？」「他にも解き方がないか？」と考えますか。

ア　はい　　イ　どちらかといえば、はい

ウ　どちらかといえば、いいえ　　エ　いいえ

（４）数学の問題を解くとき、自分の解き方や考え方がわかるようにノートに書いていますか。

ア　いつも書いている　　イ　必要なときのみ書いている

ウ　書かないことが多い　　エ　ほとんど書かない

（５）問題の解き方について、友だちと話し合ったり、一緒に考えたりすることは大切だと思いますか。

ア　はい　　イ　どちらかといえば、はい

ウ　どちらかといえば、いいえ　　エ　いいえ

（６）授業で学習する、数学の「公式」や「用語」を覚えるようにしていますか。

ア　はい　　イ　どちらかといえば、はい

ウ　どちらかといえば、いいえ　　エ　いいえ

（７）問題を解くとき、図や表、絵をかいて考えていますか。

ア　はい　　イ　どちらかといえば、はい

ウ　どちらかといえば、いいえ　　エ　いいえ

（８）数学の授業で公式やきまりを学習するとき、「なぜそうなるのか」といった理由を考えるようにしていますか。

ア　はい　　イ　どちらかといえば、はい

ウ　どちらかといえば、いいえ　　エ　いいえ

（９）数学の授業で学習したことが日常生活でどのように活用できるかを考えたことがありますか。

ア　はい　　イ　どちらかといえば、はい

ウ　どちらかといえば、いいえ　　エ　いいえ

（10）日常生活の中で、数学の授業で学習した「公式」や「用語」、「考え方」を活用したことがありますか。
あるならば、どんな場面かを書いてください。

第１時　　指導案　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**【資料９】**

１．題　材　　「ともなって変わる２つの数量の関係について考える」

２．目　標　　・関数の意味を理解することができる。

・身の回りで関数であると考えられることがらを見つけることができる。「数学化」

３．指導過程(５０分)

学習活動	指導上の留意点	重視する視点
第１プロセス **問題の理解** ＜見つけてみよう＞ スーパーの写真からともなって変わる２つの数量を考える。	・スーパーの絵を見せ、１つの数量が変わると、それにともなって、もう１つの数量が変わるものを考えさせる。 ・２つの数量がどのように変化するかも考えさせる。 〇買うものの量が増えると代金が増える。 〇人が増えると店の売り上げが増える。 〇売り上げが増えると商品の数が減る。 〇買い物カゴの数が増えるとカゴの高さが高くなる。	「数学化」 （A）
第２プロセス **問題の特徴づけと表現** （めあて） ともなって変わる２つの数量を考えよう。	・肉の値段がどのように変わるのかを考えさせる。 ・100ｇあたりの値段が 138 円である肉を買うとき、買う重さを決めると代金はどうなるか表を使って考える。 ・表をうめさせ、値を確認する。 ・重さが x ｇのときの代金を y 円とすると、x と y は、いろいろな値をとることができることを確認する。 ・「変数」とは、「x、y のように、いろいろな値をとることのできる文字である」ことを確認する。	
第３プロセス **問題の解決** ともなって変わる２つの数量の関係について考える。	・肉の代金は、買う重さにともなって変わることを確認する。 ・重さが決まると、それに対応する代金がただ１つ決まることを確認する。 ・関数の定義「x の値を決めると、それに対応して y の値がただ１つに決まるとき、y は x の関数である」を確認する。 ・肉の代金と買う重さは関数の関係になっていることを確認し、「肉の代金は買う重さの関数である」と表現することを確認する。	
第４プロセス **解決方法の共有** ＜見つけてみよう＞で考えた２つの数量が関数であるものを見つける。	・グループで考えさせる。 ・第１プロセスで考えたものが、関数であるか考えさせる。 ・２つの数量の x と y を決め、「y は x の関数である」と表現について、x、y の変数だけでなく、具体的な言葉で「～は・・・の関数である」と表現させる。	「数学化」 （B）
第５プロセス **問題の熟考と発展** 身の回りで、関数であると考えられるものを見つける。	・身の回りで、ともなって変わる２つの数量を考えさせる。 ・２つの数量の x と y を決め、関数の関係であるものは、具体的な言葉で「～は・・・の関数である」と表現させる。 ・関数の関係でないものは、２つの数量だけを記入させる。	「数学化」 （A）（B）

＜重視する視点＞

（A）日常生活の事象の中にある数量関係から、「ともなって変わる２つの数量」を見つける。

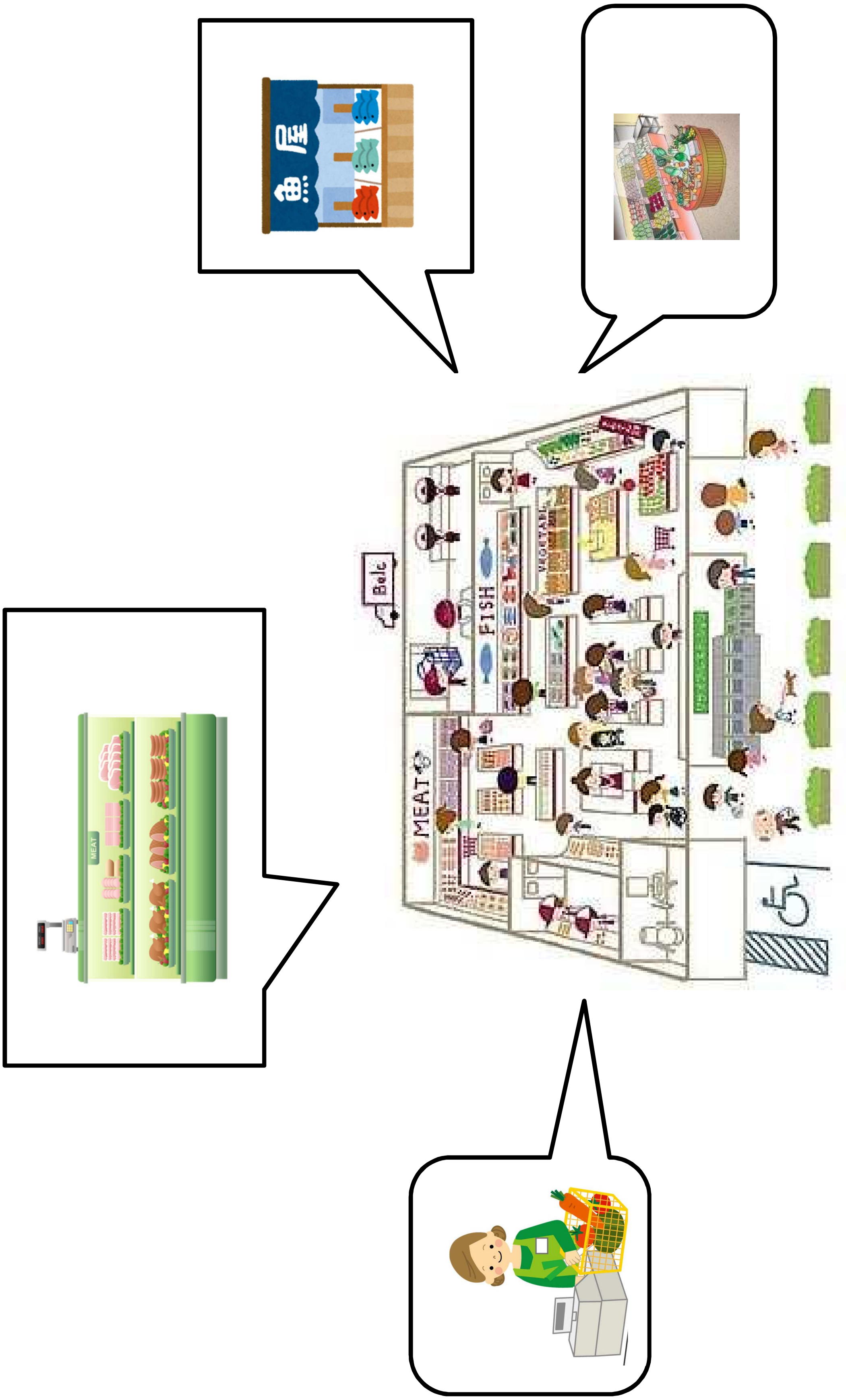
（B）日常生活の事象の中にある数量関係が、関数（比例・反比例）の関係であることを認識する。

第１時　第５プロセス活用ワークシート

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　　）

問題　身の回りで、ともなって変わる２つの数量を考え、関数であるものは、
「～は…の関数である。」と書きましょう。

ともなって変わる２つの数量		～は…の関数である
x	y	


魚屋
FISH
MEAT

第２時　　指導案　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**【資料 12】**

１．題　材　　「いろいろな関数の関係を表や式、グラフから考える」

２．目　標　　・変化の様子を表や式、グラフを使って表すことができる。「数学化」「表現」

・関数には、比例以外の関係もあることを知る。「数学化」

３．指導過程(５０分)

学習活動	指導上の留意点	重視する視点
第１プロセス **問題の理解** 正方形を階段状に並べたとき、階段の段数が増えるとそれにともなって変わる数量を考える。	・階段の段数を増やしたとき、それにともなって変わる数量をできるだけ、たくさん見つけさせる。 ○正方形の数　○全体の面積　○階段の高さ ○まわりの長さ　○頂点の数　○一番下の段の正方形の数	「数学化」 （A）
第２プロセス **問題の特徴づけと表現** **第３プロセス　問題の解決** **第４プロセス　解決方法の共有** （めあて） 表、グラフを使って、ともなって変わる２つの数量の様子を考えよう。 ともなって変わる２つの数量の表、グラフを考える。	・グループで、考えさせる。 ・表やグラフを使って、ともなって変わる様子を考える。 ・比例、一次関数、二次関数、の３つの関数について考えるようにする。 ○比例　階段の高さ　一番下の段の正方形の数　$y=x$ まわりの長さ　$y=4x$ ○一次関数　頂点の数　$y=2x+2$ ○二次関数　正方形の数　全体の面積　$y=\frac{1}{2}x(x+1)$ ・生徒が式を作れそうであれば、作らせる。 ・グラフは点をとるだけにさせる。 ・できた表やグラフ、式を確認する。 ・どれも、xの値を決めると、それに対応するyの値がただ１つ決まるので、yはxの関数であることを確認する。	「数学化」 （B） 「表現」 （C）
第５プロセス **問題の熟考と発展** 関数であるものを見つける練習問題をする。	（1）１枚 10 円のコピーをx枚とったときの料金y円 （2）５Ｌの水をxＬ使った時の残りの量yＬ （3）長さ 10mのテープをxm使った残りのテープの長さym （4）x歳の人の身長は$y$cm ・関数でないものは理由も書かせる。（4）関数でない。 ○同じ歳の人でも、身長は人それぞれなので、xの値を決めても、yの値がただ１つ決まるわけではない。 ○反例を示す。 ・理由の表現の仕方も確認する。 ★宿題として、上記の練習問題のような関数の関係である問題をx、yを使って自分で考えさせる。	「数学化」 （B）

＜重視する視点＞

（A）日常生活の事象の中にある数量関係から、「ともなって変わる２つの数量」を見つける。

（B）日常生活の事象の中にある数量関係が、関数（比例・反比例）の関係であることを認識する。

（C）「ともなって変わる２つの数量の変化」を表・式・グラフを用いて、数学的に表現する。

第２時　第５プロセス活用ワークシート・家庭学習用ワークシート

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

問題　次のうち、y が x の関数であるものはどれですか。関数でないものは理由も書きなさい。

（1）1枚10円のコピーを x 枚とったときの料金 y 円

（2）5 L の水を x L 使ったときの残りの量 y L

（3）長さ10 m のテープを x m 使ったときの残り y m

（4）x 歳の人の身長は y cm

関数であるもの

関数でないもの

＜関数でない理由＞

（　）組（　）番　名前（　　　　　　　）

問題　下の例のように、関数の関係である問題を作りましょう。

(例)1 枚 x 円のコピーを 10 枚とったときの料金 y 円

第３時　指導案　　**【資料 14】**

１．題　材　　「比例の式や定数の意味を理解する」

２．目　標　　・表から比例の特徴や比例の意味、式について、考えることができる。「表現」

・変域の意味を理解し、変域を不等号を用いて表すことができる。「表現」

３．指導過程(５０分)

学習活動	指導上の留意点	重視する視点
第１プロセス **問題の理解** 水槽の水の量を考える。	・ともなって変わる２つの数量を確認する。 ・現在の水位を基準に０ｃｍ、x 分後の水位を y ｃｍとする。 ・２分前、２分後を正の数、負の数を使って、どのように表すか確認する。 ・水を入れる時間と水の高さは関数の関係であるかを考えさせる。 ・「～は・・・の関数である」と自分なりに表現させ、「水の高さは水を入れる時間の関数である」ことを確認する。	「数学化」 （A）（B）
第２プロセス **問題の特徴づけと表現** （めあて） 表を使って考えよう。	・表を作って、x と y の関係を考えさせる。	「数学化」 （B）
第３プロセス　問題の解決 **第４プロセス　解決方法の共有** 表からわかることを考える。	・表から気づくことを考えさせる。 ○ x の値が２倍、３倍・・・になると y の値も２倍、３倍・・・になる。 ○ x の値が負の数になっても x の値が２倍、３倍・・・になると y の値も２倍、３倍・・・になる。 ○ x の値が１ずつ増えると y の値が２ずつ増える。 ○ x の値も y の値も ０ を境にして、符号が変わるだけで、絶対値が同じになる。（x の値も y の値も０を挟んで絶対値が左右対称) ○いつも x の値を２倍すると y の値になる。 ○ x の値が０以外の $\frac{y}{x}$ の値はいつも一定で２になる。 ・どこから気づいたのか、発表させるときに根拠を言わせる。 ・用語や表現の仕方も確認をしていく。自分の表現がおかしい場合は直したり、付け加えたりするようにする。	「表現」 （C）（D）
比例の式や定数の意味を確認する。	・比例は x の値が２倍、３倍・・・になると y の値も２倍、３倍・・・になること確認する。（小学校の復習)	

	・y を x の式で表すとは $y=$ と表すことを確認する。 ・y を x の式で表すと $y=2x$ になることを考えせる。 ・定数の意味を確認する。 ・比例の式、比例定数について確認する。 ・$\dfrac{y}{x}$ の値や x の値が１のときの y の増加量が比例定数になることを確認する。 ・関数の１つが比例であることを確認する。 ・「〜は・・・に比例する」という表現の仕方を確認し、「水の高さは水を入れる時間に比例する」と表現の仕方になることを確認する。 ・Ｐ110 の問１をする。 ・答え合わせをする。 ・「〜は・・・に比例する」という表現について確認する。	「表現」 （D）
変域について確認する。	・水槽の水の量を使って、変域が必要なことを確認する。 ・変域の意味について確認する。 ・不等号の使い方や式の表し方についても確認する。 ・$-5 \leqq x \leqq 5$ と表すことを確認する。 ・数直線で不等号を表すときの●、○の表し方について確認する。 ・Ｐ108 の例４　を使って、変域の表し方を確認する。 ・$-5 \leqq x \leqq 5$ と例４の不等号の表し方の違いについても確認する。 ・Ｐ108 の問４をする。 ・答え合わせをする。	「表現」 （C）

＜重視する視点＞

（A）日常生活の事象の中にある数量関係から、「ともなって変わる２つの数量」を見つける。

（B）日常生活の事象の中にある数量関係が、関数（比例・反比例）の関係であることを認識する。

（C）「ともなって変わる２つの数量の変化」を表・式・グラフを用いて、数学的に表現する。

（D）問題を数学の言語や表、式、グラフと相互に関連付けて表現する。

第５時　指導案

【資料 15】

１．題　材　　「比例の式」

２．目　標　　・比例の式を求めることができる。「表現」

・比例の関係を利用して、考えることができる。「数学化」

３．指導過程(５０分)

学習活動	指導上の留意点	重視する視点
第１プロセス **問題の理解** 比例の式を求める。	・P112　例題 1　を使って、与えられた条件から、x と y の関係を式に表すことを考える。	「表現」 （C）
第２プロセス **問題の特徴づけと表現** （めあて） 与えられた条件から比例の式を考えよう。 x、y の値から比例定数を求める。	・比例の式は $y=ax$ であることを確認する。 ・x の値と y の値がわかっているので、比例定数 a の値を求めればよいことを確認する。 ・x と y の関係を式で表すので、比例定数 a を求めるだけでなく、$y=ax$ の形で答えることを確認する。 ・$y=ax$ に $x=8$、$y=16$ を代入して方程式で解く解き方と、比例では、$\dfrac{y}{x}$ の値がいつも一定で、比例定数に等しいことを使って解く解き方と２つの方法を確認する。	
第３プロセス **問題の解決** **第４プロセス** **解決方法の共有** 問３をする。	・Ｐ112　問３を練習する。答え合わせ	「表現」 （C）
第５プロセス **問題の熟考と発展** 比例の関係を利用して、表や式で考える。	・プールの水が深さ 100 ㎝になるまでにかかる時間を求め、水を止める時刻を考えさせる。 ・どのように考えたのか、わかるように記述させる。 〇水を x 時間入れると水の深さが y ㎝になるとして、表や比例の式を作り考える。 $y=ax$ に $x=5$、$y=60$ を代入し、$60=5a$ となる。 よって $a=12$ となるので、$y=12x$ $y=100$ を代入し、$100=12x$ となる。よって $x=\dfrac{25}{3}$ 〇水を 1 時間入れると水の深さが 12 ㎝になることを求め、水の深さ 100 ㎝になるまでにかかる時間を求める。 5 時間で 60 ㎝だから 1 時間では、$60\div 5=12$ よって、水の深さは 12 ㎝になる。 水の深さが 100 ㎝になるまでにかかる時間は $100\div 12=\dfrac{25}{3}$（時間）になる。	「数学化」 （A）（B） 「表現」 （C）

	○比の式を使って考える。 100 ㎝になるまでかかる時間を x 時間とすると $5:60 = x:100$　だから　$x = \dfrac{25}{3}$ ○水の深さが 100 ㎝になるには、水の深さが 60 ㎝になるまでに 5 時間かかったので、$\dfrac{100}{60}$倍（$\dfrac{5}{3}$倍）の時間がかかる。 $5 \times \dfrac{5}{3} = \dfrac{25}{3}$（時間） ・水を入れるまでにかかる時間は$\dfrac{25}{3}$時間となるので、分数の形ではなく、8 時間 20 分に直して考えさせる。 ・時間を分に直す方法を確認する。 ・5 時間を 300 分に直して考えてもよい。 ○水を 1 ㎝ためるのにかかる時間を求め、水の深さが 100 ㎝になるまでにかかる時間を求める。 5 時間（300 分）で 60 ㎝たまったので、1 ㎝ためるには、 300÷60＝5(分)だから 100 ㎝ためるには 100×5＝500(分) 500 分＝8 時間 20 分 ・水を止める時刻は 10 時 50 分に水を入れ始め、８時間２０分後、水がいっぱいになるので、止める時刻は 19 時 10 分または、午後 7 時 10 分になることを確認する。 ・ともなって変わる２つの数量を確認し、比例の関係になっていることを確認する。 ・「水の深さは水を入れる時間に比例すること」を確認し、比例の式を使って、考えられることを押させる。 ・比例定数が水を入れて、1 時間後の高さを表していることを確認する。	「数学化」 （B）

＜重視する視点＞

（A）日常生活の事象の中にある数量関係から、「ともなって変わる２つの数量」を見つける。

（B）日常生活の事象の中にある数量関係が、関数（比例・反比例）の関係であることを認識する。

（C）「ともなって変わる２つの数量の変化」を表・式・グラフを用いて、数学的に表現する。

第５時　　第５プロセス活用ワークシート

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

問題　プール掃除が終わったので、体育の授業で使えるように、空のプールの水の深さが100 cm になるまで、一定の割合で水を入れます。10 時 50 分から水を入れ始めました。5 時間後に様子を見に行くと、水の深さは60 cm でした。水を止める時刻を求めなさい。

どのように考えたのか、計算式、言葉、図、表、矢印、絵などを使い、考えた過程がわかるように工夫して書きましょう。

第12時　　第５プロセス活用ワークシート

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

問題　けいたさんが電子レンジで温めようとしている食品には、「 500Wの場合 5 分 30 秒温め てください。」と表示がありました。けいたさんの家の電子レンジの出力は600Wなので、加熱するのに必要な時間がわかりませんでした。そこで、電子レンジの出力と時間の関係をインターネットで調べてみたところ、時間は出力に反比例することがわかりました。けいたさんは温める時間をどのように設定すればよいですか。

どのように考えたのか、計算式、言葉、図、表、矢印、絵などを使い、考えた過程がわかるように工夫して書きましょう。

第 12 時　指導案

【資料 17】

１．題　材　　「反比例の式」

２．目　標　　・反比例の式を求めることができる。「表現」

・反比例の式を利用して、考えることができる。「数学化」

３．指導過程(５０分)

学習活動	指導上の留意点	重視する視点
第１プロセス **問題の理解** 反比例の式を求める。	・Ｐ123　例題１を使って、与えられた条件から、x と y の関係を式で表すことを考える。	「表現」 （C）
第２プロセス **問題の特徴づけと表現** （めあて） 与えられた条件から反比例の式を考えよう。 x 、y の値から比例定数を求める。	・反比例の式は $y=\frac{a}{x}$ であることを確認する。 ・x の値と y の値がわかっているので、比例定数 a の値を求めればよいことを確認する。 ・x と y の関係を式で表すので、比例定数 a を求めるだけでなく、$y=\frac{a}{x}$ の形で答えることを確認する。	
第３プロセス **問題の解決** **第４プロセス** **解決方法の共有** 問３、練習問題②をする。	・$y=\frac{a}{x}$ に $x=4$ 、$y=2$ を代入して方程式で解く解き方と、反比例では、xy の値がいつも一定で、比例定数に等しいことを使って解く解き方と２つの方法を確認する。 ・Ｐ123　問３、Ｐ123　練習問題②をする。答え合わせ	「表現」 （C）
第５プロセス **問題の熟考と発展** 反比例の関係を利用して、表や式で考える。	・食品が温まるまでの時間は、電子レンジの出力（W）に反比例することを利用して、レンジで温める時間を考えさせる。 ・どのように考えたのか、わかるように記述させる。 〇5 分 30 秒を 330 秒に直して考える。 〇時間は出力に反比例するので、x　Wのとき、y 秒温めるとして、表や反比例の式を考える。 $y=\frac{a}{x}$ に $x=500$ 、$y=330$ を代入し、$330=\frac{a}{500}$ となる。 よって $a=165000$ となるので、$y=\frac{165000}{x}$ $x=600$ を代入し、$y=\frac{165000}{600}=275$（秒）になる。 〇比例定数＝500×330＝165000 だから $y=\frac{165000}{x}$	「数学化」 （A）（B） 「表現」 （C）

	$x=600$ を代入し、$y=\frac{165000}{600}=275$ （秒）になる。 ○反比例なので、出力（x）が 500Wから 600Wに$\frac{6}{5}$倍になっている。よって、時間（y）は 330 秒を$\frac{5}{6}$倍すればよいので、330×$\frac{5}{6}$＝275（秒） ○（誤答例）比の式を使って考える。 $500:330=600:y$ だから $y=396$ （秒） ・温める時間は 275 秒または、4 分 35 秒になる。 ・比の式を使って、考えている生徒がいれば、比の式は比例の関係を使っているので、反比例では使えないことを確認する。	

＜重視する視点＞

（A）日常生活の事象の中にある数量関係から、「ともなって変わる２つの数量」を見つける。

（B）日常生活の事象の中にある数量関係が、関数（比例・反比例）の関係であることを認識する。

（C）「ともなって変わる２つの数量の変化」を表・式・グラフを用いて、数学的に表現する。

第15時　指導案

【資料18】

１．題　材　　「比例の利用」

２．目　標　　・表やグラフからマラソン選手の各距離とタイムが比例の関係であることに気づくことができる。「数学化」「表現」

・マラソン選手のラップタイムと距離が比例することを利用して、ゴールの時間を予想することができる。「数学化」「表現」

３．指導過程(５０分)

<table>
<tr><th>学習活動</th><th>指導上の留意点</th><th>重視する視点</th></tr>
<tr><td>第５プロセス
問題の熟考と発展
リオオリンピックの女子マラソン優勝選手の各距離のタイムからゴールの時間を予想する。
（めあて）
女子マラソン優勝選手のゴールタイムを予想するのは、どのように考えたらいいだろう。

表、式、グラフを使い、各距離とタイムの関係を考える。</td><td>・マラソン選手の各距離でのタイムから比例の関係になることを利用して、ゴールの時間を予想する。どのように考えたのか考えた過程を書かせる。また、各距離とタイムには、どんな関係があると考えられるか理由も含めて書かせる。

・必要であれば、グラフをかかせる。
・表やグラフから各距離とタイムが比例の関係であることを利用してゴールの時間を予想させる。
・マラソン選手のラップタイムから表やグラフからどんな特徴があるか考えさせる。
○表から「距離が2倍、3倍、・・・となると各距離のタイムも2倍、3倍、・・・になっている」と考えることができるから、比例の関係である。
だから、5ｋｍのタイムが17分なので、42.195ｋｍは5㎞の8.439倍なので、17×8.439＝143.463（分）
○グラフをかくと、原点を通る直線と考えることができるから比例の関係である。
だから、42.195ｋｍのグラフを読み取ると、だいたい144分になる。
○距離をx、タイムをyとして、$\frac{y}{x}$の値を求めると、
$\frac{17}{5}=3.4$、$\frac{34}{10}=3.4$、$\frac{15}{52}=3.46\cdots$、$\frac{20}{69}=3.45$、
$\frac{25}{86}=3.44$、$\frac{30}{103}=3.43\cdots$と、$\frac{y}{x}$の値が一定になると考えられるので、比例の関係である。
$\frac{17}{5}=3.4$を比例定数として、$y=\frac{17}{5}x$（$y=3.4x$）の関係の式ができる。これは、$y=ax$の形になるので、式からも比例の関係であると考えられる。
だから、比例の式$y=\frac{17}{5}x$に$x=42.195$を代入すると
$y=143.463$</td><td>「数学化」
（A）（B）
「表現」
（C）（D）</td></tr>
</table>

ゴール時間を求める。 各距離とタイムの関係と考えた根拠を交流する。	○ゴールの時間は 143.463 分または、2 時間 23 分 46 秒、144 分または、2 時間 24 分 ・グループでどのように考えたのか、各距離とタイムがどんな関係があるのか、その関係と考えた根拠を中心に交流させる。 ・各距離とタイムは比例の関係になることを確認し、「タイムは各距離に比例する」という表現になることを確認する。 ・オリンピックに出場するマラソン選手は一定の速さで走っているので、「オリンピックに出場するマラソン選手の各距離でのタイムは距離に比例する」ことを確認し、実際にこの関係を使って、テレビ中継をする時間を決めたり、マラソン大会では、交通規制の時間を決めたりしていることを紹介する。 ・グラフの利用として、他の選手のグラフを重ねてかくと、選手同士のタイム差や距離の差がわかることも伝える。	 「数学化」 （B） 「表現」 （D）

＜重視する視点＞

（A）日常生活の事象の中にある数量関係から、「ともなって変わる２つの数量」を見つける。

（B）日常生活の事象の中にある数量関係が、関数（比例・反比例）の関係であることを認識する。

（C）「ともなって変わる２つの数量の変化」を表・式・グラフを用いて、数学的に表現する。

（D）問題を数学の言語や表、式、グラフと相互に関連付けて表現する。

【資料19】

第15時　第５プロセス活用ワークシート
(　　　)組(　　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　　　　　)

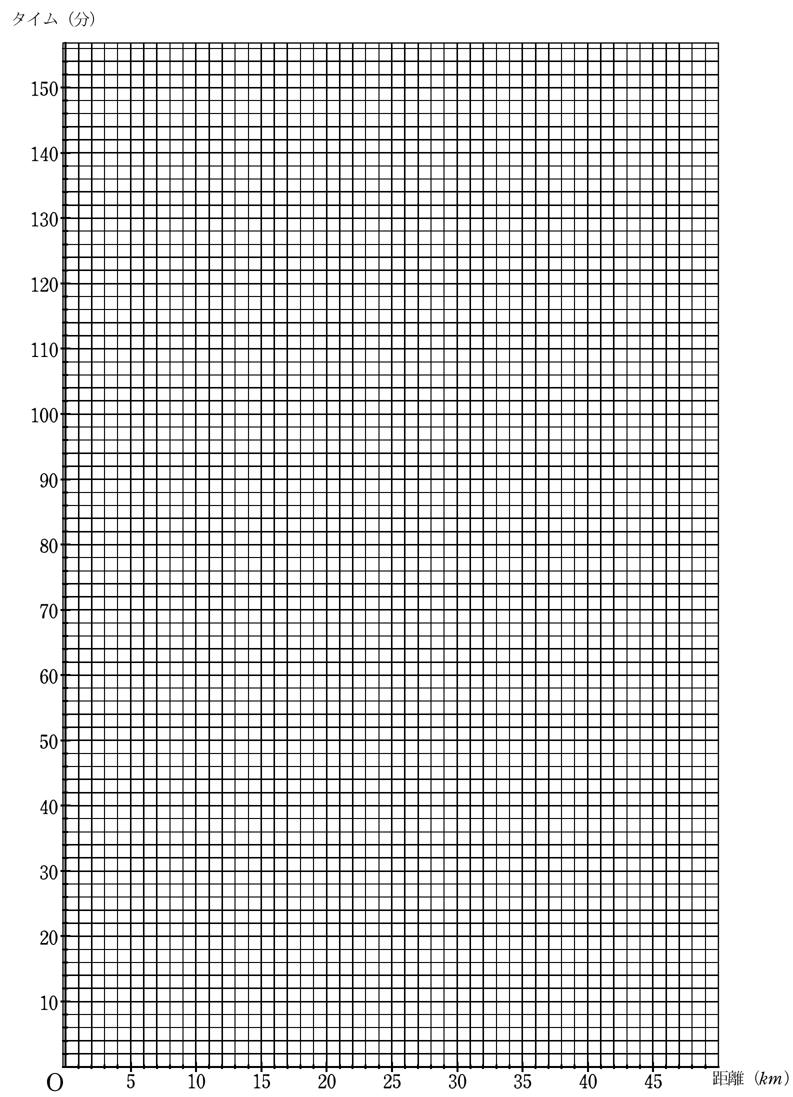
問題　下の表はリオオリンピックでの女子マラソン（42.195 *km*）で優勝した選手の各距離でのタイムです。ゴールするまでの時間を予想しなさい。

どのように考えたのか、計算式、言葉、図、グラフ（裏面）、矢印、絵などを使い考えた過程がわかるように工夫して書きなさい。

また、距離とタイムにはどのような関係があると考えられますか、理由も含めて書きなさい。

距離（*km*）	5	10	15	20	25	30
タイム（分）	17	34	52	69	86	103

＜距離とタイムには、どのような関係があると考えられるのか。理由も含めて書きましょう。＞



第 16 時　指導案　【資料 20】

１．題　材　「反比例の利用」

２．目　標　・視力とランドルト環の大きさが反比例の関係であることに気づくことができる。「数学化」「表現」

・視力とランドルト環の大きさが反比例の関係であることを利用して、視力が 0.05 のランドルト環を作ることができる。「数学化」「表現」

３．指導過程(５０分)

学習活動	指導上の留意点	重視する視点
第５プロセス **問題の熟考と発展** （めあて） 視力が 0.05 のランドルト環を作るには、どうしたらよいか考えよう。	・視力検査表の図の名前をランドルト環という名前であることを確認する。 ・このランドルト環では 0.1 までしか測定できないので、視力を測る場所を変えずに、視力が 0.05 のランドルト環を作りたい。視力が 0.05 のランドルト環を作るのに知りたいことを考えさせる。 〇ランドルト環の直径 〇すき間の大きさ 〇ランドルト環の太さ 〇ランドルト環の内側の直径	「数学化」 （A）
視力検査表からランドルト環の大きさを測り、表、グラフを作る。	・ランドルト環の直径、すき間の大きさ、ランドルト環の太さ、ランドルト環の内側の直径の中から１つ選んで、視力検査表から長さを測る。 ・定規を使って、測るので数値には誤差があることをおさえておく。表はｍｍで記入をさせる。	「表現」 （C）
表、式、グラフからランドルト環と視力の関係を考えさせる。	・表、グラフからランドルト環と視力の関係を考えさせる。 〇表から「視力が２倍、３倍、・・・となるとランドルト環の大きさが $\frac{1}{2}$ 倍、$\frac{1}{3}$ 倍、・・・になっている」と考えることができるから、反比例の関係である。 〇グラフをかくと、原点を通らない、曲線になり、双曲線のグラフになっていると考えられるので、反比例の関係である。 〇視力 x 、ランドルト環の大きさ y と考えると、xy の値が、一定になると考えられるので、反比例である。 ランドルト環の直径の場合、7.5 が比例定数になり、$y=\frac{7.5}{x}$ の関係の式ができる。 ランドルト環の太さ、すき間の大きさの場合、1.5 が比例定数になり、$y=\frac{1.5}{x}$ の関係の式ができる。	「数学化」 （B） 「表現」 （C）（D）

	ランドルト環の内側の直径の場合、4.5が比例定数になり、 $y=\dfrac{4.5}{x}$ の関係の式ができる。 これらは、$y=\dfrac{a}{x}$ の形になるので、式からも反比例の関係であることがわかる。	
視力とランドルト環の関係とその関係を考えた根拠を交流する。	・グループで、各自で調べた視力とランドルト環の大きさにどんな関係があるのか、その関係と考えた根拠を中心に交流させる。 ・視力とランドルト環の大きさは反比例の関係になることを確認し、「ランドルト環の大きさは視力に反比例する」という表現になることを確認する。	「数学化」 （B） 「表現」 （D）
視力が 0.05 のランドルト環を作る。	・調べたことを使って、視力が 0.05 のランドルト環を作る。作るのに使った計算式や表、図、絵を記述するようにさせる。 〇式を使って、$x=0.05$ を代入し、ランドルト環の大きさを求める。 〇表を使って、視力が 0.1 から 0.05 に $\dfrac{1}{2}$ 倍になるとランドルト環の大きさは2倍になることを使って求める。 〇ランドルト環の直径 1.5 ㎝ 〇ランドルト環の太さ、すき間の大きさ 0.75 ㎝ 〇ランドルト環の内側の直径 2.25 ㎝	「数学化」 （B） 「表現」 （D）

＜重視する視点＞

（A）日常生活の事象の中にある数量関係から、「ともなって変わる２つの数量」を見つける。

（B）日常生活の事象の中にある数量関係が、関数（比例・反比例）の関係であることを認識する。

（C）「ともなって変わる２つの数量の変化」を表・式・グラフを用いて、数学的に表現する。

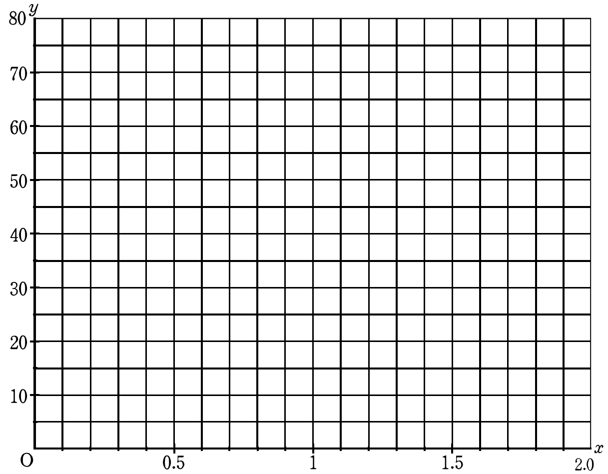
（D）問題を数学の言語や表、式、グラフと相互に関連付けて表現する。

第16時　第５プロセス活用　ワークシート

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　)

○数量の変化の様子について、表やグラフ、式に表してみよう。

視力(x)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	1.5	2.0
(y)													



＜視力とランドルト環には、どのような関係があると考えられるのか。理由も含めて書きましょう。＞

問　視力が0.05のランドルト環を作ろう。

ランドルト環を作るのに使った計算式、図、絵などがあれば、書きなさい。

中学校数学科における数学的な思考力を高める研究
－日常生活の事象を数学と結びつけて－

〔研究協力員〕	四日市市立山手中学校	教　　諭	塚本真由味
〔執　筆　者〕	四日市市教育委員会	長期研修員	大橋　玲子
〔指導・助言〕	国立教育政策研究所	総括研究官	松尾　知明

研究調査報告　第402集

中学校数学科における数学的な思考力を高める研究
－日常生活の具体的な事象を数学と結びつけて－

発　行　平成２９年３月２２日
発行所　四日市市教育委員会教育支援課
四日市市諏訪町２番２号
電話　(059) 354-8149
FAX　(059) 359-0280